Durchschnitte und Sichtbarkeit

Elmar Langetepe
University of Bonn

Durchschnitt von Halbgeraden/Konvexe Hülle

Durchschnitt von Halbgeraden/Konvexe Hülle

- n Geraden $G_i, 1 \leq i \leq n$, in der Ebene, nicht senkrecht

Durchschnitt von Halbgeraden/Konvexe Hülle

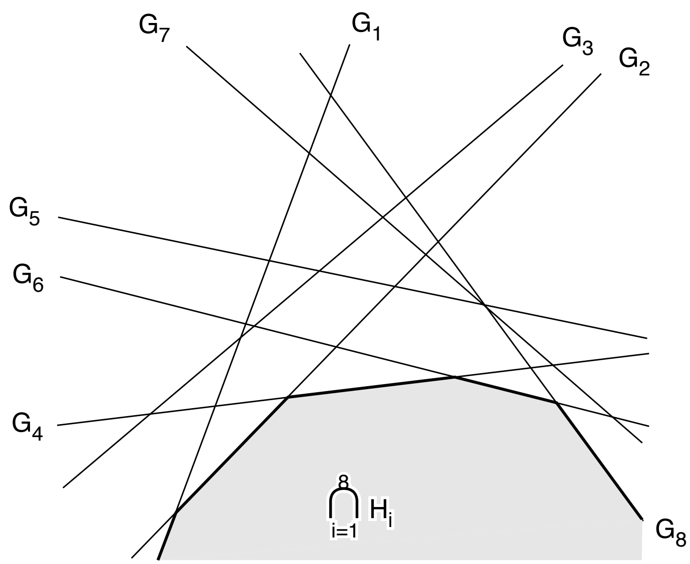
- n Geraden $G_i, 1 \leq i \leq n$, in der Ebene, nicht senkrecht
- $G_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = a_i x + b_i\} = \{Y = a_i X + b_i\}$

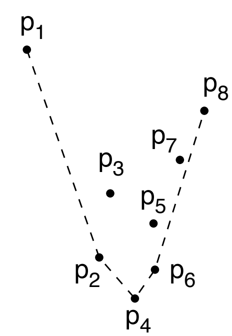
Durchschnitt von Halbgeraden/Konvexe Hülle

- n Geraden $G_i, 1 \leq i \leq n$, in der Ebene, nicht senkrecht
- $G_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y = a_i x + b_i\} = \{Y = a_i X + b_i\}$
- Durchschnitt der unteren Halbebenen $H_i = \{Y \leq a_i X + b_i\}$

Durchschnitt von Halbgeraden/Konvexe Hülle

- n Geraden $G_i, 1 \leq i \leq n$, in der Ebene, nicht senkrecht
- $G_i = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y = a_i x + b_i\} = \{Y = a_i X + b_i\}$
- Durchschnitt der unteren Halbebenen $H_i = \{Y \leq a_i X + b_i\}$





Jetzt: Dualität ausnutzen

Jetzt: Dualität ausnutzen

Theorem 4.10 Arrangement von n Geraden G_i:

$G_i \cap G_j$ ist Eckpunkt des Durchschnitts der unteren Halbebenen $\Longleftrightarrow$ das Liniensegment $G_i^* G_j^*$ ist eine untere Kante der konvexen Hülle der Punkte G_i^*

Jetzt: Dualität ausnutzen

Theorem 4.10 Arrangement von n Geraden G_i:

$G_i \cap G_j$ ist Eckpunkt des Durchschnitts der unteren Halbebenen $\iff$ das Liniensegment $G_i^* G_j^*$ ist eine untere Kante der konvexen Hülle der Punkte G_i^*

Konvexe Hülle und Schnitt von Halbebenen ist identisch

Jetzt: Dualität ausnutzen

Theorem 4.10 Arrangement von n Geraden G_i:

$G_i \cap G_j$ ist Eckpunkt des Durchschnitts der unteren Halbebenen $\iff$ das Liniensegment $G_i^* G_j^*$ ist eine untere Kante der konvexen Hülle der Punkte G_i^*

Konvexe Hülle und Schnitt von Halbebenen ist identisch

Beweis!

Ergebnisse

Ergebnisse

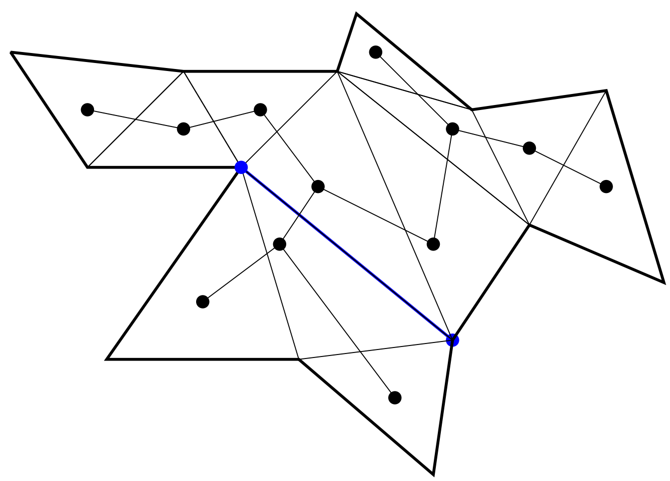
Korollar 4.11 Die Berechnung des Durchschnitts von n Halbebenen hat die Zeitkomplexität $\Theta(n \log n)$.

Ergebnisse

Korollar 4.11 Die Berechnung des Durchschnitts von n Halbebenen hat die Zeitkomplexität $\Theta(n \log n)$.

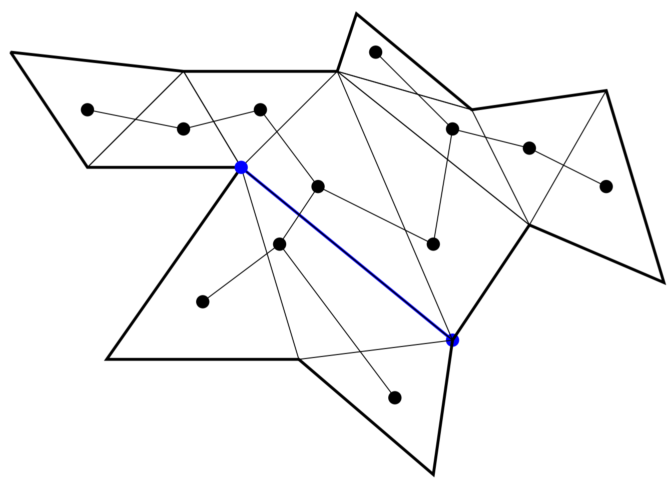
Korollar 4.12 Der Schnitt von n Halbebenen, deren Geraden nach Steigung sortiert sind, kann in Zeit $O(n)$ berechnet werden.

Triangulation



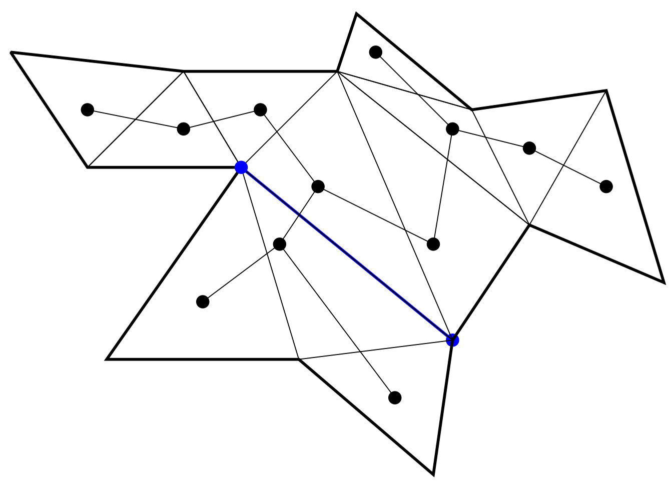
Triangulation

- Struktur ausnutzen (Kürzeste Wege, Suchen nach Punkten)



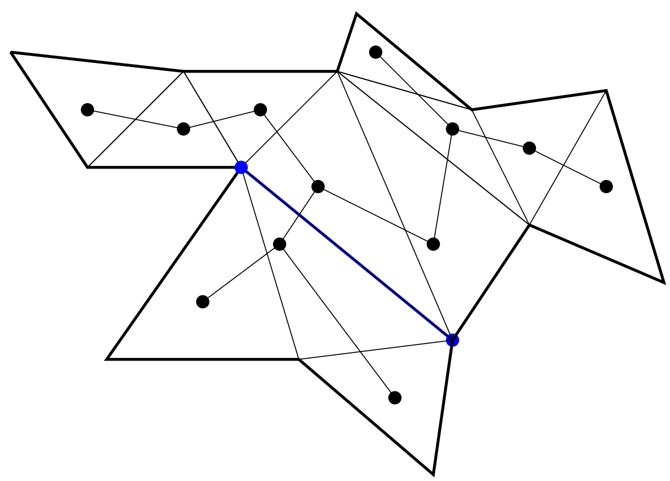
Triangulation

- Struktur ausnutzen (Kürzeste Wege, Suchen nach Punkten)
- Definition, Diagonale von P: Liniensegment in P zwischen Ecken p_i und p_j, das den Rand von P genau in p_i und p_j gemeinsam hat



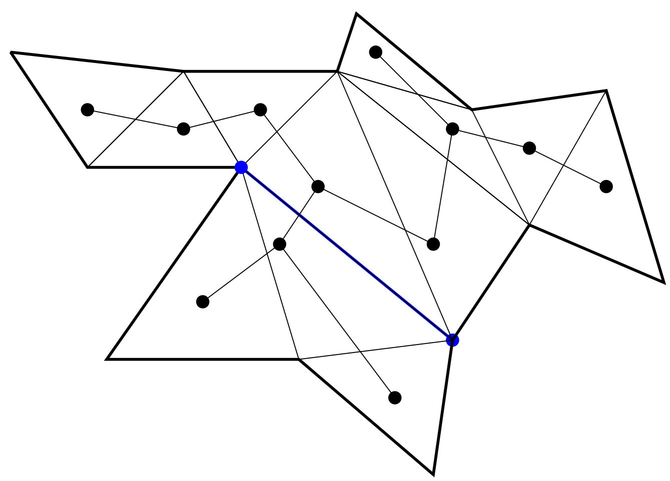
Triangulation

- Struktur ausnutzen (Kürzeste Wege, Suchen nach Punkten)
- Definition, Diagonale von P: Liniensegment in P zwischen Ecken p_i und p_j, das den Rand von P genau in p_i und p_j gemeinsam hat
- Definition, Triangulation von P: Maximale Menge sich nicht schneidender Diagonalen von P zusammen mit Rand



Triangulation

- Struktur ausnutzen (Kürzeste Wege, Suchen nach Punkten)
- Definition, Diagonale von P: Liniensegment in P zwischen Ecken p_i und p_j, das den Rand von P genau in p_i und p_j gemeinsam hat
- Definition, Triangulation von P: Maximale Menge sich nicht schneidender Diagonalen von P zusammen mit Rand
- DS: Folge von Dreiecken (Dual: Baum)



Triangulation

Triangulation

Lemma 4.14: Jedes einfache Polygon P kann trianguliert werden.

Triangulation

Lemma 4.14: Jedes einfache Polygon P kann trianguliert werden.

- Induktion über Anzahl $|P| = n$

Triangulation

Lemma 4.14: Jedes einfache Polygon P kann trianguliert werden.

- Induktion über Anzahl $|P| = n$
- Ind. Anfg.: $n = 3$ fertig! Dreieck!

Triangulation

Lemma 4.14: Jedes einfache Polygon P kann trianguliert werden.

- Induktion über Anzahl $|P| = n$
- Ind. Anfg.: $n = 3$ fertig! Dreieck!
- Ind. Schluss: $|P| = n$, $n \geq 4$

Triangulation

Lemma 4.14: Jedes einfache Polygon P kann trianguliert werden.

- Induktion über Anzahl $|P| = n$
- Ind. Anfg.: $n = 3$ fertig! Dreieck!
- Ind. Schluss: $|P| = n$, $n \geq 4$
- Lemma 4.13: Ex ex. stets mind. eine Diagonale d

Triangulation

Lemma 4.14: Jedes einfache Polygon P kann trianguliert werden.

- Induktion über Anzahl $|P| = n$
- Ind. Anfg.: $n = 3$ fertig! Dreieck!
- Ind. Schluss: $|P| = n$, $n \geq 4$
- Lemma 4.13: Ex ex. stets mind. eine Diagonale d
- Aufteilung: P_1, P_2 entlang d, Ind. Ann. für P_1, P_2 und zusammensetzen

Triangulation

Triangulation

Lemma 4.13: Ist P konvex, dann bildet jedes nicht-konsekutive Paar von Ecken eine Diagonale. Ist P nicht-konvex, und v eine beliebige spitze Ecke (Innenwinkel $> 180^\circ$), dann gibt es eine Diagonale mit Eckpunt v.

Triangulation

Lemma 4.13: Ist P konvex, dann bildet jedes nicht-konsekutive Paar von Ecken eine Diagonale. Ist P nicht-konvex, und v eine beliebige spitze Ecke (Innenwinkel $> 180^\circ$), dann gibt es eine Diagonale mit Eckpunt v.

Beweis! Konstruktiv geometrisch!

Triangulation: Anzahl Dreiecke/Diagonalen, Dualer Graph

Triangulation: Anzahl Dreiecke/Diagonalen, Dualer Graph

Bemerkung: Jede Triangulation von P mit $|P| = n$ hat $n - 2$ Dreiecke und $n - 3$ Diagonalen!

Beweis: Induktion, wie eben!

Triangulation: Anzahl Dreiecke/Diagonalen, Dualer Graph

Bemerkung: Jede Triangulation von P mit $|P| = n$ hat $n-2$ Dreiecke und $n-3$ Diagonalen!

Beweis: Induktion, wie eben!

Lemma 4.15: Der *duale Graph* T^* ist ein Baum mit Knotengrad ≤ 3.

Triangulation: Anzahl Dreiecke/Diagonalen, Dualer Graph

Bemerkung: Jede Triangulation von P mit $|P| = n$ hat $n - 2$ Dreiecke und $n - 3$ Diagonalen!

Beweis: Induktion, wie eben!

Lemma 4.15: Der *duale Graph* T^* ist ein Baum mit Knotengrad ≤ 3.

Beweis:

Triangulation: Anzahl Dreiecke/Diagonalen, Dualer Graph

Bemerkung: Jede Triangulation von P mit $|P| = n$ hat $n - 2$ Dreiecke und $n - 3$ Diagonalen!

Beweis: Induktion, wie eben!

Lemma 4.15: Der *duale Graph* T^* ist ein Baum mit Knotengrad ≤ 3.

Beweis: Benutze *Ohrensatz!*

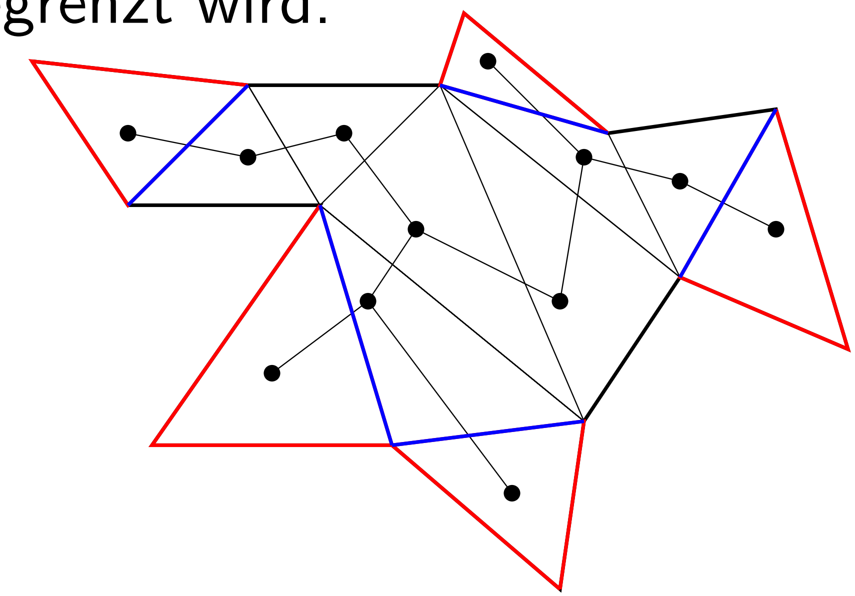
Triangulation: Ohrensatz

Triangulation: Ohrensatz

Theorem 4.16: In jeder Triangulation eines einfachen Polygons mit $n \geq 4$ Ecken, gibt es mindestens zwei Dreiecke, deren Rand nur von einer Diagonale begrenzt wird.

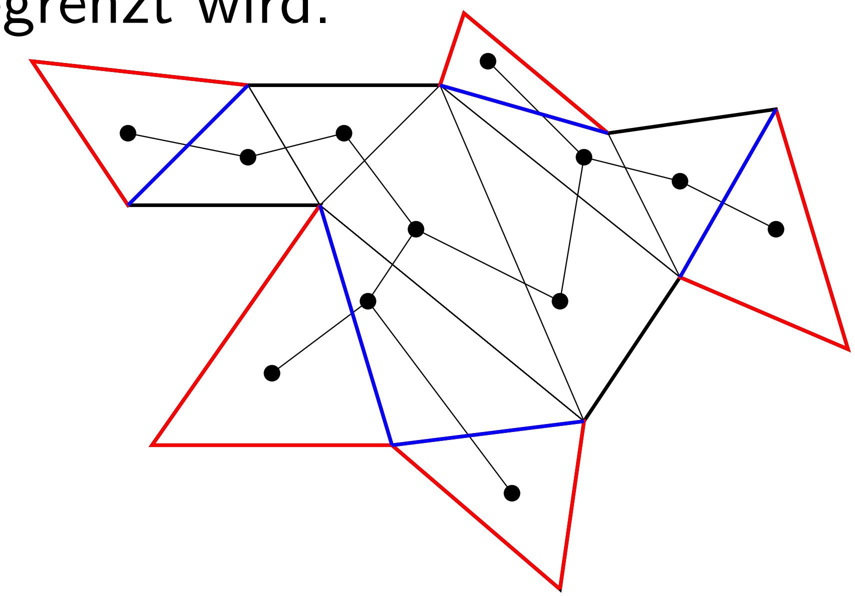
Triangulation: Ohrensatz

Theorem 4.16: In jeder Triangulation eines einfachen Polygons mit $n \geq 4$ Ecken, gibt es mindestens zwei Dreiecke, deren Rand nur von einer Diagonale begrenzt wird.



Triangulation: Ohrensatz

Theorem 4.16: In jeder Triangulation eines einfachen Polygons mit $n \geq 4$ Ecken, gibt es mindestens zwei Dreiecke, deren Rand nur von einer Diagonale begrenzt wird.



Beweis: Zählargument!

Triangulation: Anwendung!

Triangulation: Anwendung!

- Turtle Geometry: Bewegung um ein Hindernis herum

Triangulation: Anwendung!

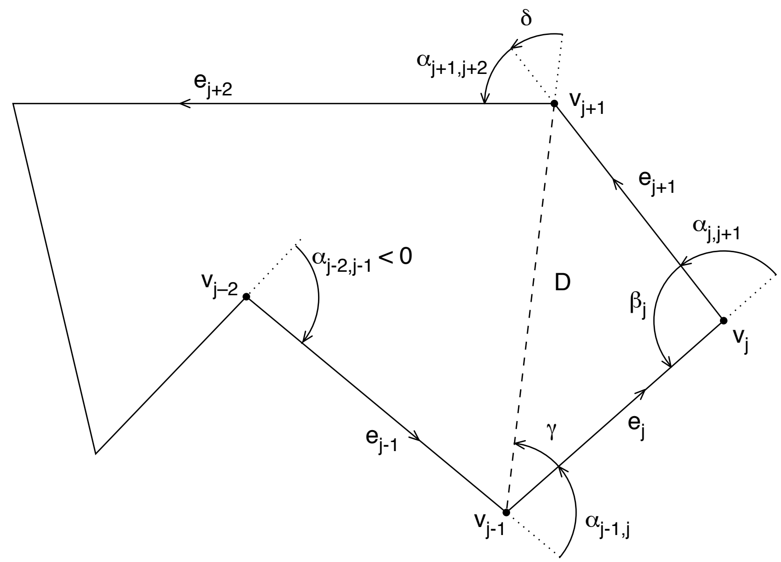
- Turtle Geometry: Bewegung um ein Hindernis herum
- Drehwinkel zählen, nach Bedingung wieder abspringen

Triangulation: Anwendung!

- Turtle Geometry: Bewegung um ein Hindernis herum
- Drehwinkel zählen, nach Bedingung wieder abspringen
- Drehwinkel (CCW) $\alpha_{j,j+1}$, Drehwinkel-Summe: $\alpha_{i,k} = \alpha_{i,i+1} + \alpha_{i+1,i+2} + \ldots + \alpha_{k-1,k}$, Gesamtdrehung $\alpha_{i,i}$!

Triangulation: Anwendung!

- Turtle Geometry: Bewegung um ein Hindernis herum
- Drehwinkel zählen, nach Bedingung wieder abspringen
- Drehwinkel (CCW) $\alpha_{j,j+1}$, Drehwinkel-Summe: $\alpha_{i,k} = \alpha_{i,i+1} + \alpha_{i+1,i+2} + \ldots + \alpha_{k-1,k}$, Gesamtdrehung $\alpha_{i,i}$!



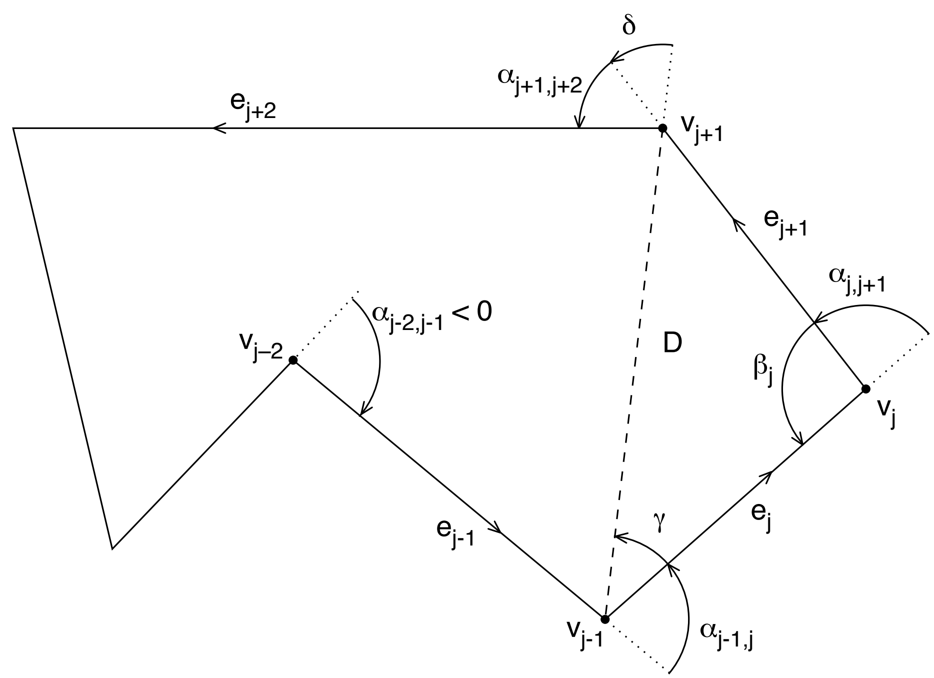
Triangulation: Anwendung Drehungen!

Triangulation: Anwendung Drehungen!

Lemma 4.17: Sei P ein einfaches Polygon und e_i eine beliebige Kante, dann gilt: $\alpha_{i,i} = 2\pi$.

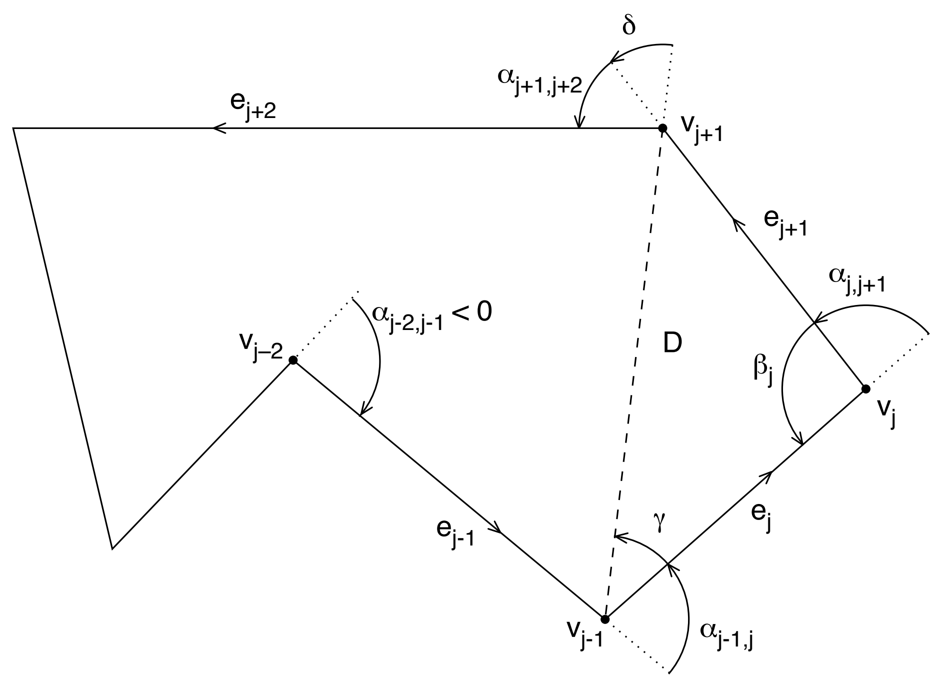
Triangulation: Anwendung Drehungen!

Lemma 4.17: Sei P ein einfaches Polygon und e_i eine beliebige Kante, dann gilt: $\alpha_{i,i} = 2\pi$.



Triangulation: Anwendung Drehungen!

Lemma 4.17: Sei P ein einfaches Polygon und e_i eine beliebige Kante, dann gilt: $\alpha_{i,i} = 2\pi$.



Beweis: Induktion (Dreiecke benutzen!)

Berechnungskomplexität!

Berechnungskomplexität!

Chazelle 1991: $O(n)$ Algorithmus, Diagonalen!

Berechnungskomplexität!

Chazelle 1991: $O(n)$ Algorithmus, Diagonalen!

Seidel 1995: $O(n \log^* n)$ Algorithmus (Vorlesung: Discrete and Computational Geometry)

Weitere Anwendung: Art Gallery Probleme

Weitere Anwendung: Art Gallery Probleme

- Einfaches Polygon gegeben: Wieviel Wächter werden benötigt?

Weitere Anwendung: Art Gallery Probleme

- Einfaches Polygon gegeben: Wieviel Wächter werden benötigt?
- Sichtbarkeit: Punkt $p \in P$, Sichtbarkeitspolygon: $\text{vis}_P(p)$

Weitere Anwendung: Art Gallery Probleme

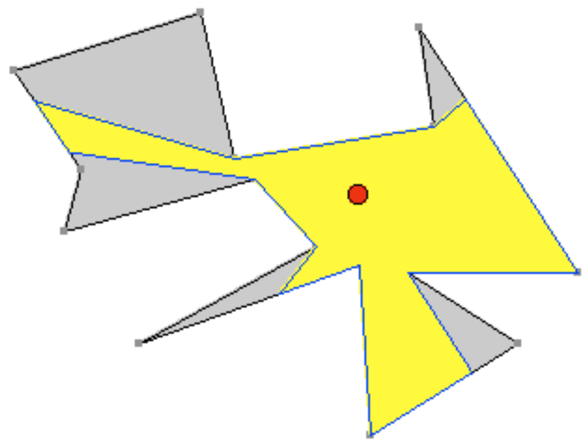
- Einfaches Polygon gegeben: Wieviel Wächter werden benötigt?
- Sichtbarkeit: Punkt $p \in P$, Sichtbarkeitspolygon: $\text{vis}_P(p)$
- Vereinigung ergibt das gesamte Polygon!

Weitere Anwendung: Art Gallery Probleme

- Einfaches Polygon gegeben: Wieviel Wächter werden benötigt?
- Sichtbarkeit: Punkt $p \in P$, Sichtbarkeitspolygon: $\text{vis}_P(p)$
- Vereinigung ergibt das gesamte Polygon!
- Finde kleinste Menge an Punkten: $P = \bigcup_{i=1}^{k} p_i$!

Weitere Anwendung: Art Gallery Probleme

- Einfaches Polygon gegeben: Wieviel Wächter werden benötigt?
- Sichtbarkeit: Punkt $p \in P$, Sichtbarkeitspolygon: $\text{vis}_P(p)$
- Vereinigung ergibt das gesamte Polygon!
- Finde kleinste Menge an Punkten: $P = \bigcup_{i=1}^{k} p_i$!



Art Gallery Probleme: Untere/Obere Schranke

Art Gallery Probleme: Untere/Obere Schranke

Theorem 4.21: Ein einfaches Polygon P mit n Ecken kann stets mit $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ Wächtern überwacht werden. Es gibt beliebig große Beispiele, wo diese Anzahl auch benötigt wird.

Art Gallery Probleme: Untere/Obere Schranke

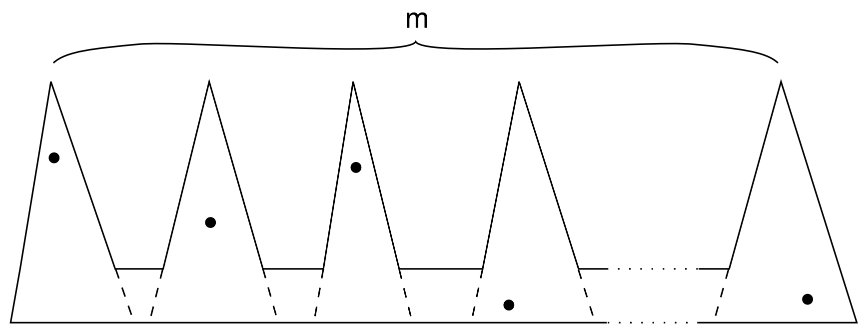
Theorem 4.21: Ein einfaches Polygon P mit n Ecken kann stets mit $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ Wächtern überwacht werden. Es gibt beliebig große Beispiele, wo diese Anzahl auch benötigt wird.

Untere Schranke, skalierbares Beispiel:

Art Gallery Probleme: Untere/Obere Schranke

Theorem 4.21: Ein einfaches Polygon P mit n Ecken kann stets mit $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ Wächtern überwacht werden. Es gibt beliebig große Beispiele, wo diese Anzahl auch benötigt wird.

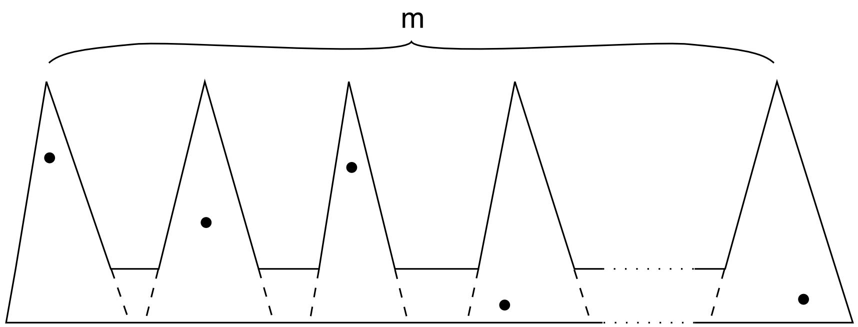
Untere Schranke, skalierbares Beispiel:



Art Gallery Probleme: Untere/Obere Schranke

Theorem 4.21: Ein einfaches Polygon P mit n Ecken kann stets mit $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ Wächtern überwacht werden. Es gibt beliebig große Beispiele, wo diese Anzahl auch benötigt wird.

Untere Schranke, skalierbares Beispiel:



Obere Schranke: Beweis mit Triangulation!

Art Gallery Probleme: Obere Schranke

Art Gallery Probleme: Obere Schranke

- $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ Wächter reichen aus!

Art Gallery Probleme: Obere Schranke

- $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ Wächter reichen aus!
- k-Färbbarkeit eines Graphen $\big(G = (V, E)$, $E \subseteq V \times V\big)$

Art Gallery Probleme: Obere Schranke

- $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ Wächter reichen aus!
- k-Färbbarkeit eines Graphen ($G = (V, E)$, $E \subseteq V \times V$)
- Färbe Kn., jede Kante zwei Kn.-farben, min. Anzahl k Farben

Art Gallery Probleme: Obere Schranke

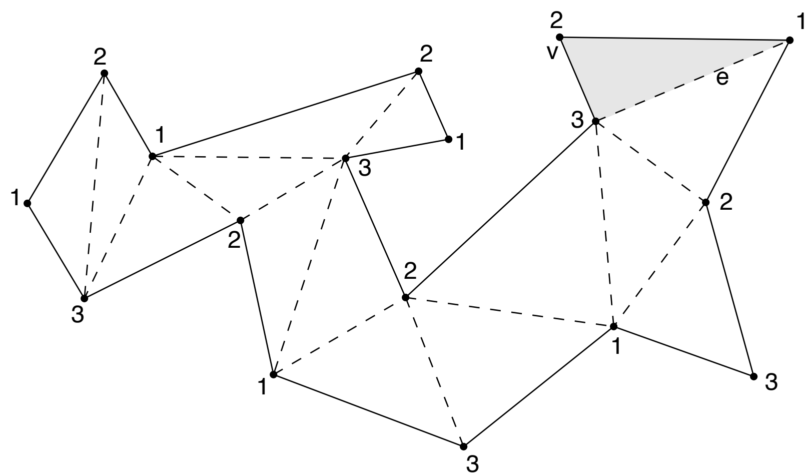
- $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ Wächter reichen aus!
- k-Färbbarkeit eines Graphen ($G = (V, E)$, $E \subseteq V \times V$)
- Färbe Kn., jede Kante zwei Kn.-farben, min. Anzahl k Farben
- Chromatic Number, 4-Färbbarkeit planarer Graphen

Art Gallery Probleme: Obere Schranke

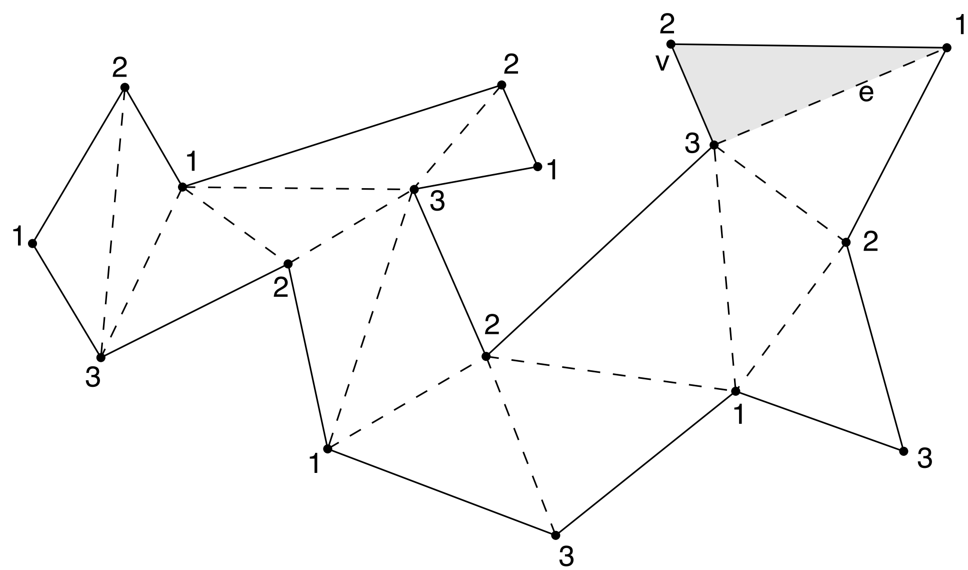
- $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ Wächter reichen aus!
- k-Färbbarkeit eines Graphen ($G = (V, E)$, $E \subseteq V \times V$)
- Färbe Kn., jede Kante zwei Kn.-farben, min. Anzahl k Farben
- Chromatic Number, 4-Färbbarkeit planarer Graphen
- Beweis: 3-Färbbarkeit einer Triangulation, Induktion!

Art Gallery Probleme: Obere Schranke

- $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ Wächter reichen aus!
- k-Färbbarkeit eines Graphen ($G = (V, E)$, $E \subseteq V \times V$)
- Färbe Kn., jede Kante zwei Kn.-farben, min. Anzahl k Farben
- Chromatic Number, 4-Färbbarkeit planarer Graphen
- Beweis: 3-Färbbarkeit einer Triangulation, Induktion!

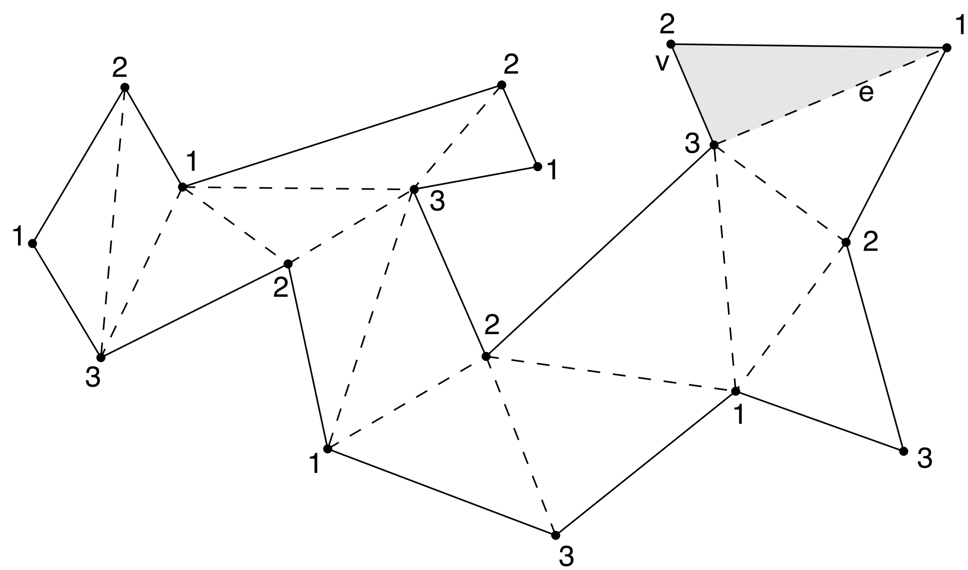


Art Gallery Probleme: Obere Schranke: $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$



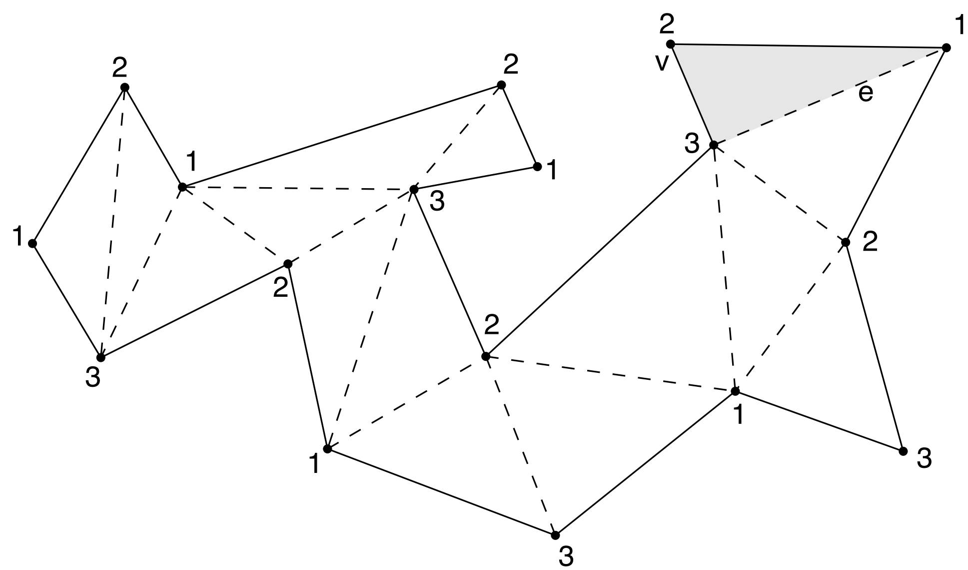
Art Gallery Probleme: Obere Schranke: $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$

- 3-Färbung verwenden



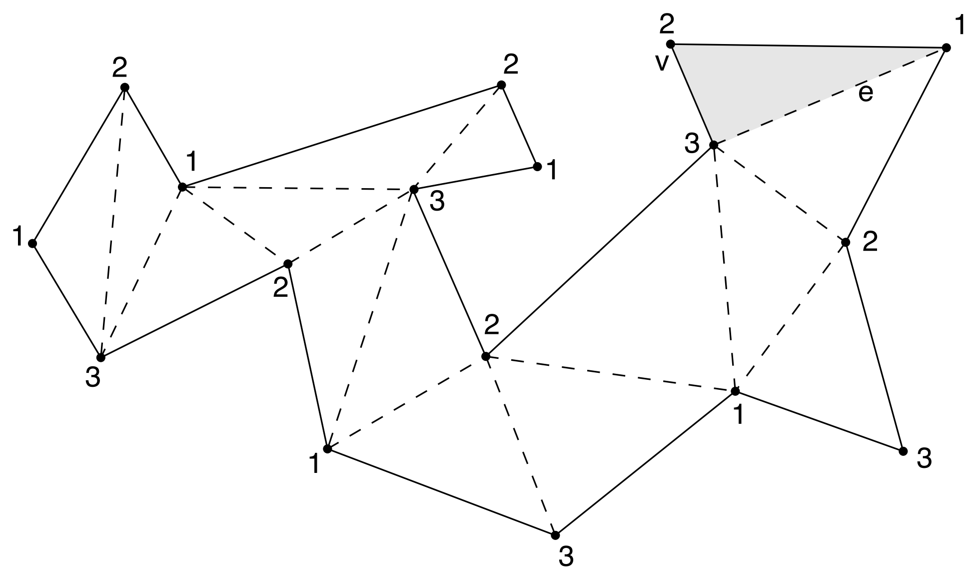
Art Gallery Probleme: Obere Schranke: $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$

- 3-Färbung verwenden
- Wähle eine Farbe, dann ist jedes Dreieck bewacht, einsehbar



Art Gallery Probleme: Obere Schranke: $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$

- 3-Färbung verwenden
- Wähle eine Farbe, dann ist jedes Dreieck bewacht, einsehbar
- Es existiert eine Farbe mit $\leq \frac{n}{3}$ vielen Knoten



Art Gallery Probleme: Obere Schranke: $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$

- 3-Färbung verwenden
- Wähle eine Farbe, dann ist jedes Dreieck bewacht, einsehbar
- Es existiert eine Farbe mit $\leq \frac{n}{3}$ vielen Knoten
- Ganzzahlig reicht: $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$