

# Voronoi Diagramme

Elmar Langetepe  
University of Bonn

# Kap. 5: Voronoi Diagramme

# Kap. 5: Voronoi Diagramme

- Zerlegung der Ebene in Zellen gleicher Nachbarschaft

# Kap. 5: Voronoi Diagramme

- Zerlegung der Ebene in Zellen gleicher Nachbarschaft
- Gegeben eine Menge von Orten  $p_1, p_2, \dots, p_n$  im  $\mathbb{R}^2$

# Kap. 5: Voronoi Diagramme

- Zerlegung der Ebene in Zellen gleicher Nachbarschaft
- Gegeben eine Menge von Orten  $p_1, p_2, \dots, p_n$  im  $\mathbb{R}^2$
- Beispiel: Applet

# Kap. 5: Voronoi Diagramme

- Zerlegung der Ebene in Zellen gleicher Nachbarschaft
- Gegeben eine Menge von Orten  $p_1, p_2, \dots, p_n$  im  $\mathbb{R}^2$
- Beispiel: Applet
- Bekannte Struktur in vielen Wissenschaften

# Kap. 5: Voronoi Diagramme

- Zerlegung der Ebene in Zellen gleicher Nachbarschaft
- Gegeben eine Menge von Orten  $p_1, p_2, \dots, p_n$  im  $\mathbb{R}^2$
- Beispiel: Applet
- Bekannte Struktur in vielen Wissenschaften
- Kap. 5: Definition, Strukturelle Eigenschaften, Anwendungen, Duales

# Kap. 5: Voronoi Diagramme

- Zerlegung der Ebene in Zellen gleicher Nachbarschaft
- Gegeben eine Menge von Orten  $p_1, p_2, \dots, p_n$  im  $\mathbb{R}^2$
- Beispiel: Applet
- Bekannte Struktur in vielen Wissenschaften
- Kap. 5: Definition, Strukturelle Eigenschaften, Anwendungen, Duales
- Kap. 6: Berechnungsalgorithmen, Sweep, Inkrementell



# Formale Definition: Voronoi Diagramm, Punktm. $S$

# Formale Definition: Voronoi Diagramm, Punktm. $S$

- Abstand, Ort  $p = (p_1, p_2)$ , Punkt  $x = (x_1, x_2)$ :  
 $|px| := \sqrt{(p_1 - x_1)^2 + (p_2 - x_2)^2}$

# Formale Definition: Voronoi Diagramm, Punktm. $S$

- Abstand, Ort  $p = (p_1, p_2)$ , Punkt  $x = (x_1, x_2)$ :  
$$|px| := \sqrt{(p_1 - x_1)^2 + (p_2 - x_2)^2}$$
- Bisektor zweier Punkte:  $B(p, q) := \{x \in R^2 \mid |px| = |qx|\}$

# Formale Definition: Voronoi Diagramm, Punktm. $S$

- Abstand, Ort  $p = (p_1, p_2)$ , Punkt  $x = (x_1, x_2)$ :  
 $|px| := \sqrt{(p_1 - x_1)^2 + (p_2 - x_2)^2}$
- Bisektor zweier Punkte:  $B(p, q) := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |px| = |qx|\}$
- $B(p, q)$  zerlegt die Ebene in:

# Formale Definition: Voronoi Diagramm, Punktm. $S$

- Abstand, Ort  $p = (p_1, p_2)$ , Punkt  $x = (x_1, x_2)$ :  
 $|px| := \sqrt{(p_1 - x_1)^2 + (p_2 - x_2)^2}$
- Bisektor zweier Punkte:  $B(p, q) := \{x \in R^2 \mid |px| = |qx|\}$
- $B(p, q)$  zerlegt die Ebene in:  
 $D(p, q) ::= \{x \in R^2 \mid |px| < |qx|\}$  und  
 $D(q, p) ::= \{x \in R^2 \mid |px| > |qx|\}$

# Formale Definition: Voronoi Diagramm, Punktm. $S$

- Abstand, Ort  $p = (p_1, p_2)$ , Punkt  $x = (x_1, x_2)$ :  
 $|px| := \sqrt{(p_1 - x_1)^2 + (p_2 - x_2)^2}$
- Bisektor zweier Punkte:  $B(p, q) := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |px| = |qx|\}$
- $B(p, q)$  zerlegt die Ebene in:  
 $D(p, q) ::= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |px| < |qx|\}$  und  
 $D(q, p) ::= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |px| > |qx|\}$
- Voronoi Region von  $p$  bezgl. Punktmenge  $S$ :  
 $VR(p, S) = \bigcap_{q \in S \setminus \{p\}} D(p, q)$

# Formale Definition: Voronoi Diagramm, Punktm. $S$

- Abstand, Ort  $p = (p_1, p_2)$ , Punkt  $x = (x_1, x_2)$ :  
 $|px| := \sqrt{(p_1 - x_1)^2 + (p_2 - x_2)^2}$
- Bisektor zweier Punkte:  $B(p, q) := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |px| = |qx|\}$
- $B(p, q)$  zerlegt die Ebene in:  
 $D(p, q) ::= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |px| < |qx|\}$  und  
 $D(q, p) ::= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |px| > |qx|\}$
- Voronoi Region von  $p$  bezgl. Punktmenge  $S$ :  
 $VR(p, S) = \bigcap_{q \in S \setminus \{p\}} D(p, q)$   
Alle Punkte, die näher an  $p$  liegen als  
an jedem anderen Punkt aus  $S$

# Formale Definition: Voronoi Diagramm, Punktm. $S$

- Abstand, Ort  $p = (p_1, p_2)$ , Punkt  $x = (x_1, x_2)$ :  
 $|px| := \sqrt{(p_1 - x_1)^2 + (p_2 - x_2)^2}$
- Bisektor zweier Punkte:  $B(p, q) := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |px| = |qx|\}$
- $B(p, q)$  zerlegt die Ebene in:  
 $D(p, q) ::= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |px| < |qx|\}$  und  
 $D(q, p) ::= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |px| > |qx|\}$
- Voronoi Region von  $p$  bezgl. Punktmenge  $S$ :  
 $VR(p, S) = \bigcap_{q \in S \setminus \{p\}} D(p, q)$   
Alle Punkte, die näher an  $p$  liegen als  
an jedem anderen Punkt aus  $S$
- $VR(p, S)$  ist offene Menge, Rand gehört nicht dazu



- Voronoi-Diagramm:  $V(S) := \mathbb{R}^2 \setminus \{VR(p, S) \mid p \in S\}$

- Voronoi-Diagramm:  $V(S) := \mathbb{R}^2 \setminus \{VR(p, S) \mid p \in S\}$
- Das was stehen bleibt: Graph  $G = (V, E)$

- Voronoi-Diagramm:  $V(S) := \mathbb{R}^2 \setminus \{VR(p, S) \mid p \in S\}$
- Das was stehen bleibt: Graph  $G = (V, E)$
- Schnitt von Halbebenen: Jede Region ist konvex!

- Voronoi-Diagramm:  $V(S) := \mathbb{R}^2 \setminus \{VR(p, S) \mid p \in S\}$
- Das was stehen bleibt: Graph  $G = (V, E)$
- Schnitt von Halbebenen: Jede Region ist konvex!
- Jeder Punkt auf dem Rand gehört zu einem Bisektor

- Voronoi-Diagramm:  $V(S) := \mathbb{R}^2 \setminus \{VR(p, S) \mid p \in S\}$
- Das was stehen bleibt: Graph  $G = (V, E)$
- Schnitt von Halbebenen: Jede Region ist konvex!
- Jeder Punkt auf dem Rand gehört zu einem Bisektor  
 $\overline{VR(p, S)} \cap \overline{VR(q, S)}$

- Voronoi-Diagramm:  $V(S) := \mathbb{R}^2 \setminus \{VR(p, S) | p \in S\}$
- Das was stehen bleibt: Graph  $G = (V, E)$
- Schnitt von Halbebenen: Jede Region ist konvex!
- Jeder Punkt auf dem Rand gehört zu einem Bisektor  

$$\overline{VR(p, S)} \cap \overline{VR(q, S)} \subseteq \overline{D(p, q)} \cap \overline{D(q, p)} = B(p, q)$$

- Voronoi-Diagramm:  $V(S) := \mathbb{R}^2 \setminus \{VR(p, S) \mid p \in S\}$
- Das was stehen bleibt: Graph  $G = (V, E)$
- Schnitt von Halbebenen: Jede Region ist konvex!
- Jeder Punkt auf dem Rand gehört zu einem Bisektor  

$$\overline{VR(p, S)} \cap \overline{VR(q, S)} \subseteq \overline{D(p, q)} \cap \overline{D(q, p)} = B(p, q)$$
- Randstück-Bezeichnung: Voronoi-Kante (Bisektor),  
 Voronoi-Knoten (Übergang)

- Voronoi-Diagramm:  $V(S) := \mathbb{R}^2 \setminus \{VR(p, S) \mid p \in S\}$
- Das was stehen bleibt: Graph  $G = (V, E)$
- Schnitt von Halbebenen: Jede Region ist konvex!
- Jeder Punkt auf dem Rand gehört zu einem Bisektor  

$$\overline{VR(p, S)} \cap \overline{VR(q, S)} \subseteq \overline{D(p, q)} \cap \overline{D(q, p)} = B(p, q)$$
- Randstück-Bezeichnung: Voronoi-Kante (Bisektor),  
 Voronoi-Knoten (Übergang)
- Konvex: Von einem Bisektor nur ein Stück!



- Voronoi-Diagramm:  $V(S) := \mathbb{R}^2 \setminus \{VR(p, S) | p \in S\}$
- Das was stehen bleibt: Graph  $G = (V, E)$
- Schnitt von Halbebenen: Jede Region ist konvex!
- Jeder Punkt auf dem Rand gehört zu einem Bisektor  

$$\overline{VR(p, S)} \cap \overline{VR(q, S)} \subseteq \overline{D(p, q)} \cap \overline{D(q, p)} = B(p, q)$$
- Randstück-Bezeichnung: Voronoi-Kante (Bisektor),  
 Voronoi-Knoten (Übergang)
- Konvex: Von einem Bisektor nur ein Stück!
- Insgesamt Wabenmuster: Planarer Graph, bestehend aus  
 Bisektorstücken

# Strukturlemma: Wozu gehört $x \in \mathbb{R}^2$ ?

## Strukturlemma: Wozu gehört $x \in \mathbb{R}^2$ ?

Lemma 5.1 Sei  $x$  ein Punkt in der Ebene, und sei  $C(x)$  der sich von  $x$  ausbreitende Kreis. Dann gilt:

$C(x)$  trifft zuerst nur auf  $p \iff x$  liegt in Vor.-Reg.  
von  $p$

$C(x)$  trifft zuerst nur auf  $p, q \iff x$  liegt auf Vor.-Kante zwischen  
Reg. von  $p$  u.  $q$

$C(x)$  trifft zuerst genau  $\iff x$  ist Vor.-Knoten,  
auf  $p_1, \dots, p_k$  mit  $k \geq 3$  Reg. von  $p_1, \dots, p_k$  grenzen an

Im letzten Fall entspricht die Ordnung der Punkte  $p_1, \dots, p_k$  auf dem Rand von  $C(x)$  der Ordnung ihrer Voronoi-Regionen um  $x$ .

Beweis:

Beweis: Anschaulich klar, formal beweisen!

# Weitere Eigenschaften!

# Weitere Eigenschaften!

Allgemeine Lage: Keine vier Orte aus  $S$  auf einem Kreis!

# Weitere Eigenschaften!

Allgemeine Lage: Keine vier Orte aus  $S$  auf einem Kreis!

Jeder Knoten von  $V(S)$  hat Grad 3!



# Weitere Eigenschaften!

Allgemeine Lage: Keine vier Orte aus  $S$  auf einem Kreis!

Jeder Knoten von  $V(S)$  hat Grad 3!

Zusammenhang: Konvexe Hülle und Voronoi-Diagramm

# Weitere Eigenschaften!

Allgemeine Lage: Keine vier Orte aus  $S$  auf einem Kreis!

Jeder Knoten von  $V(S)$  hat Grad 3!

Zusammenhang: Konvexe Hülle und Voronoi-Diagramm

Lemma 5.2 Genau dann hat ein Punkt  $p \in S$  eine unbeschränkte Voronoi-Region, wenn er auf dem Rand der konvexen Hülle von  $S$  liegt.

Beweis:

# Weitere Eigenschaften!

Allgemeine Lage: Keine vier Orte aus  $S$  auf einem Kreis!

Jeder Knoten von  $V(S)$  hat Grad 3!

Zusammenhang: Konvexe Hülle und Voronoi-Diagramm

Lemma 5.2 Genau dann hat ein Punkt  $p \in S$  eine unbeschränkte Voronoi-Region, wenn er auf dem Rand der konvexen Hülle von  $S$  liegt.

Beweis: Zwei Richtungen beweisen!

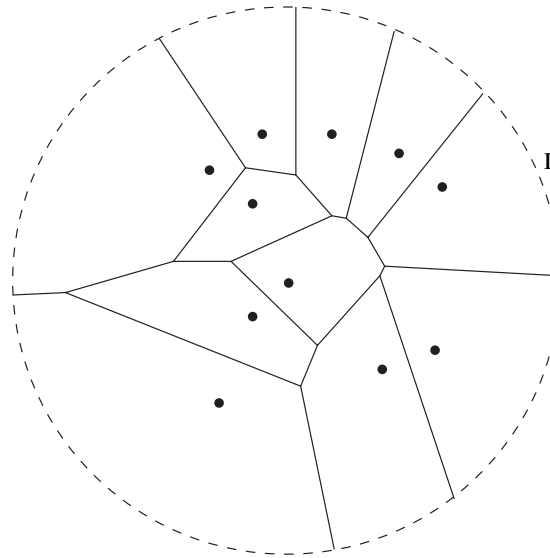
# Beschränkung des Diagramms

# Beschränkung des Diagramms

Äußere unbeschränkte Regionen durch Kantenzug verbinden!  $V_0(S)$

# Beschränkung des Diagramms

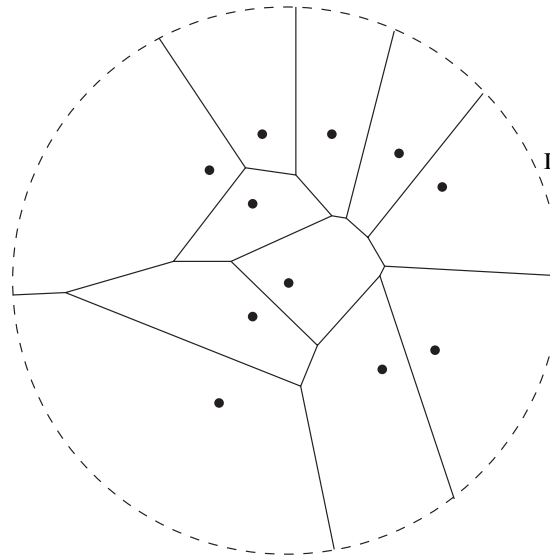
Äußere unbeschränkte Regionen durch Kantenzug verbinden!  $V_0(S)$



Theorem 5.3 Das Voronoi-Diagramm einer Menge von  $n$  Punkten in der Ebene hat  $O(n)$  viele Knoten und Kanten. Im Mittel hat jede Fläche höchstens 6 Kanten.

# Beschränkung des Diagramms

Äußere unbeschränkte Regionen durch Kantenzug verbinden!  $V_0(S)$

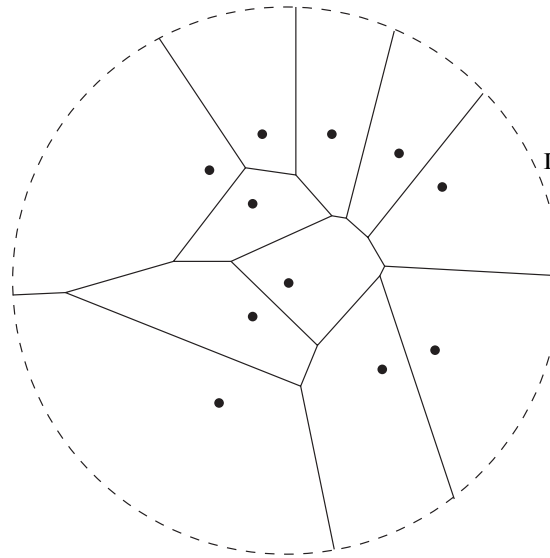


Theorem 5.3 Das Voronoi-Diagramm einer Menge von  $n$  Punkten in der Ebene hat  $O(n)$  viele Knoten und Kanten. Im Mittel hat jede Fläche höchstens 6 Kanten.

Beweis:

# Beschränkung des Diagramms

Äußere unbeschränkte Regionen durch Kantenzug verbinden!  $V_0(S)$



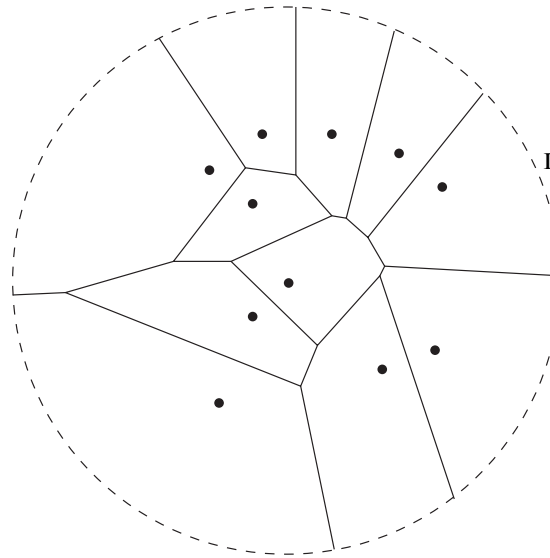
Theorem 5.3 Das Voronoi-Diagramm einer Menge von  $n$  Punkten in der Ebene hat  $O(n)$  viele Knoten und Kanten. Im Mittel hat jede Fläche höchstens 6 Kanten.

Beweis:  $\text{Grad}(v) \geq 3$ , Korollar 1.2,



# Beschränkung des Diagramms

Äußere unbeschränkte Regionen durch Kantenzug verbinden!  $V_0(S)$



Theorem 5.3 Das Voronoi-Diagramm einer Menge von  $n$  Punkten in der Ebene hat  $O(n)$  viele Knoten und Kanten. Im Mittel hat jede Fläche höchstens 6 Kanten.

Beweis:  $\text{Grad}(v) \geq 3$ , Korollar 1.2, gilt für  $V_0(S)$ ,  $V(S)$

# Konvexe Hülle ermitteln

# Konvexe Hülle ermitteln

Datenstruktur  $V(S)$  gegeben, unbeschränkte Kanten

# Konvexe Hülle ermitteln

Datenstruktur  $V(S)$  gegeben, unbeschränkte Kanten

Durchlaufe sukzessive die unbeschränkten Flächen

# Konvexe Hülle ermitteln

Datenstruktur  $V(S)$  gegeben, unbeschränkte Kanten

Durchlaufe sukzessive die unbeschränkten Flächen

Theorem 5.4 Aus dem Voronoi-Diagramm  $V(S)$  läßt sich in linearer Zeit die konvexe Hülle von  $S$  bestimmen.

# Konvexe Hülle ermitteln

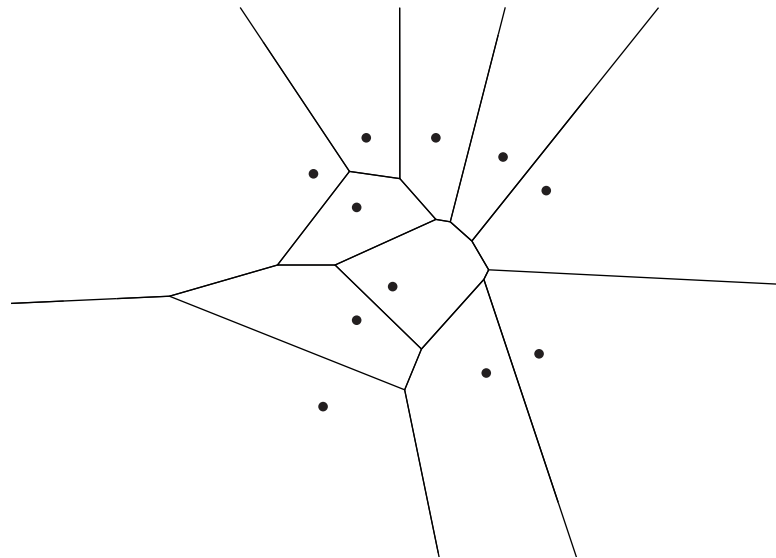
Datenstruktur  $V(S)$  gegeben, unbeschränkte Kanten

Durchlaufe sukzessive die unbeschränkten Flächen

Theorem 5.4 Aus dem Voronoi-Diagramm  $V(S)$  läßt sich in linearer Zeit die konvexe Hülle von  $S$  bestimmen.

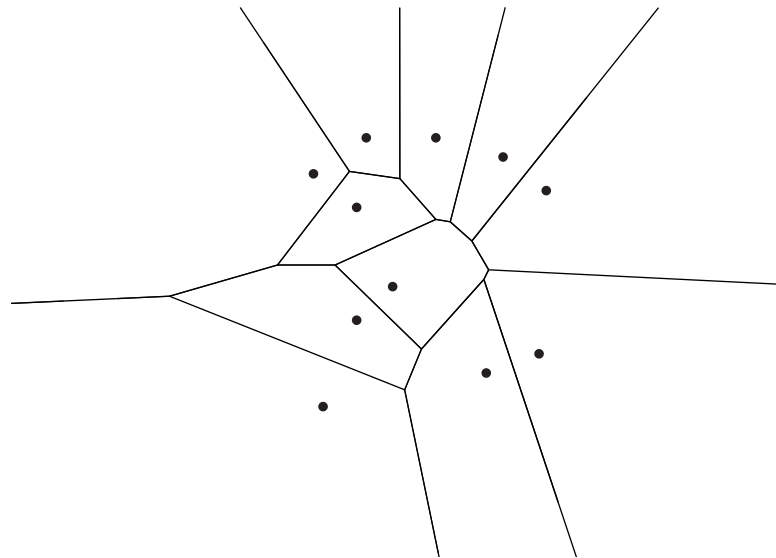
Korollar 5.5: Die Berechnung des Voronoi-Diagramms  $V(S)$  von  $n$  Punkten hat Zeitkomplexität  $\Omega(n \log n)$ .

# Anwendungen: Nächstes Postamt



# Anwendungen: Nächstes Postamt

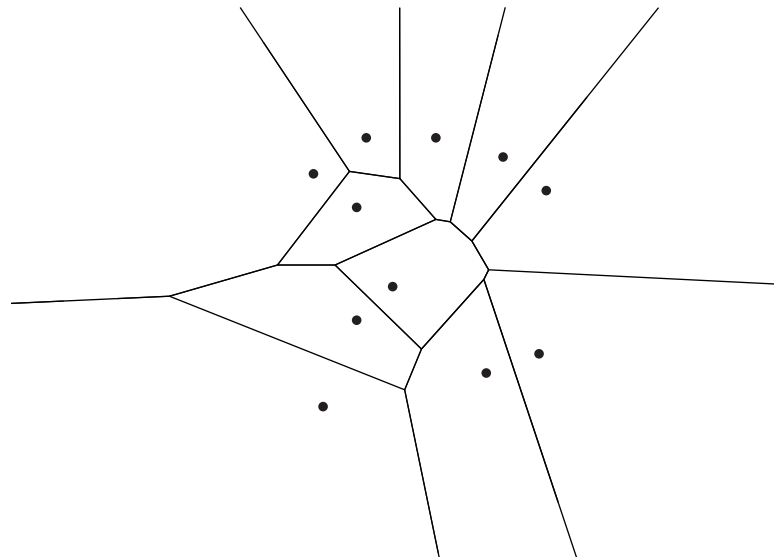
- $S$  eine Menge von Postämtern





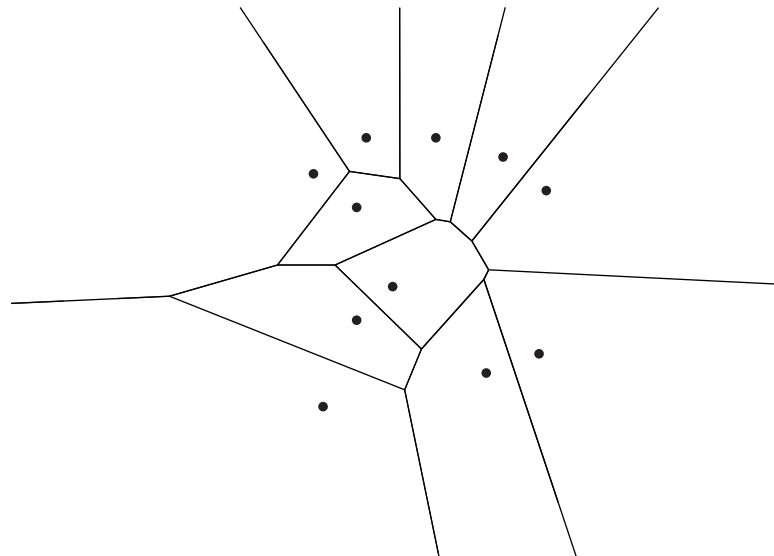
# Anwendungen: Nächstes Postamt

- $S$  eine Menge von Postämtern
- Welches liegt am nächsten zu Standort  $x$ ?



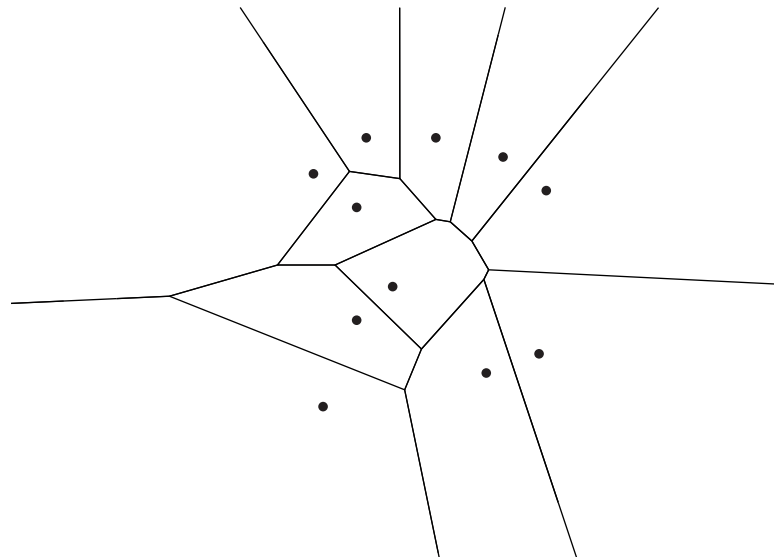
# Anwendungen: Nächstes Postamt

- $S$  eine Menge von Postämtern
- Welches liegt am nächsten zu Standort  $x$ ?
- Voronoi-Diagramm: Zellen der nächsten Nachbarschaft



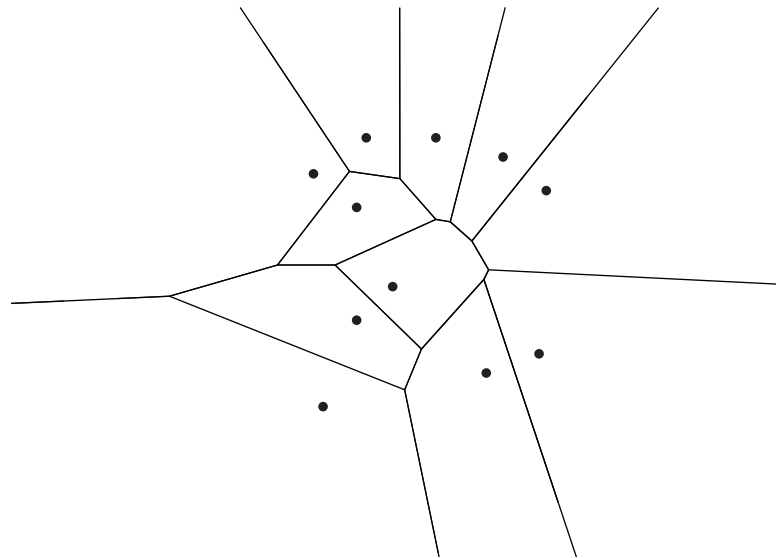
# Anwendungen: Nächstes Postamt

- $S$  eine Menge von Postämtern
- Welches liegt am nächsten zu Standort  $x$ ?
- Voronoi-Diagramm: Zellen der nächsten Nachbarschaft
- Aufgabe: Finde Zelle  $Z$  mit  $x \in Z$

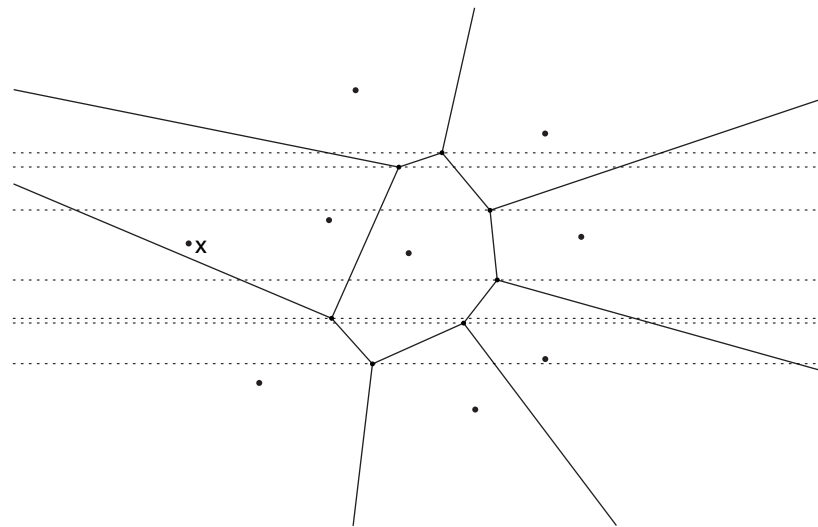


# Anwendungen: Nächstes Postamt

- $S$  eine Menge von Postämtern
- Welches liegt am nächsten zu Standort  $x$ ?
- Voronoi-Diagramm: Zellen der nächsten Nachbarschaft
- Aufgabe: Finde Zelle  $Z$  mit  $x \in Z$
- Gleiche Antwort für alle  $x$  in einer Region  $VR(p, S)$ : Locus approach!

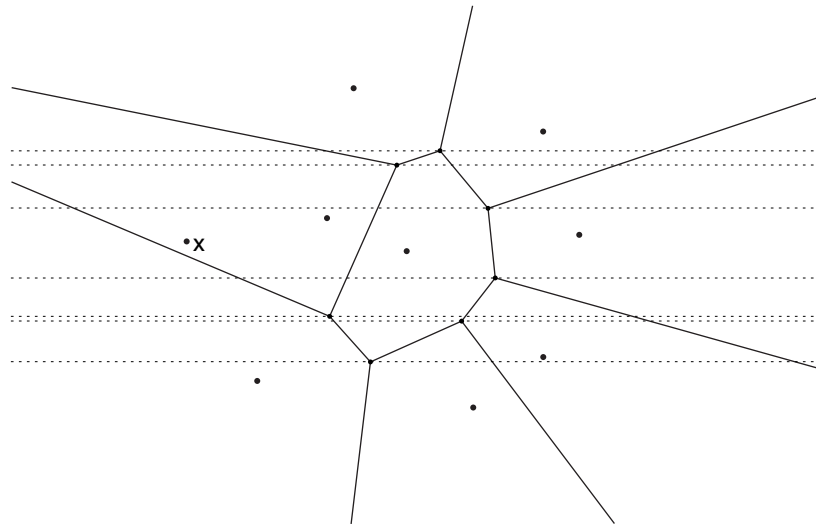


# Nächstes Postamt: Streifenmethode



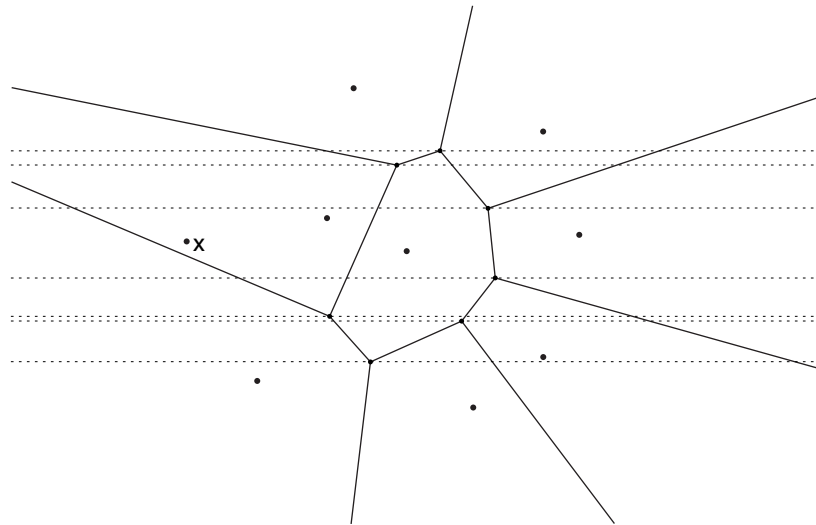
# Nächstes Postamt: Streifenmethode

- Datenstruktur: Anfragepunkt  $x \in \mathbb{R}^2$



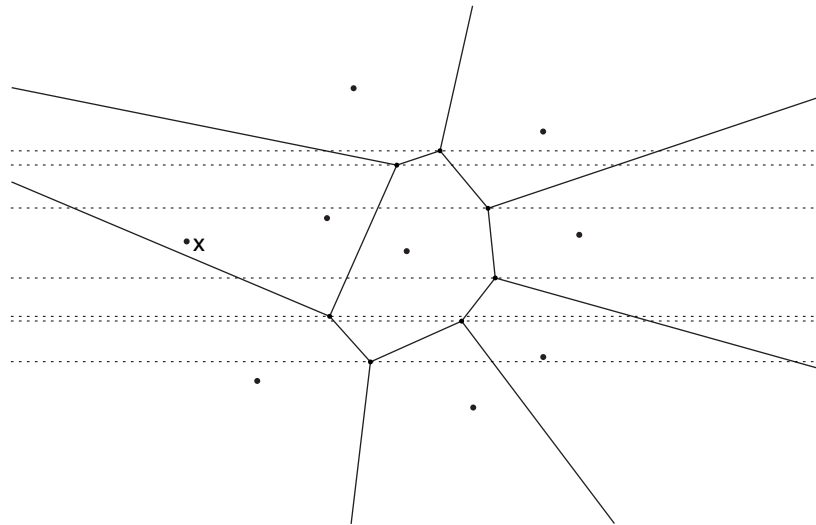
# Nächstes Postamt: Streifenmethode

- Datenstruktur: Anfragepunkt  $x \in \mathbb{R}^2$
- Streifenmethode: Einteilung in Streifen, Ablegen in Baum



# Nächstes Postamt: Streifenmethode

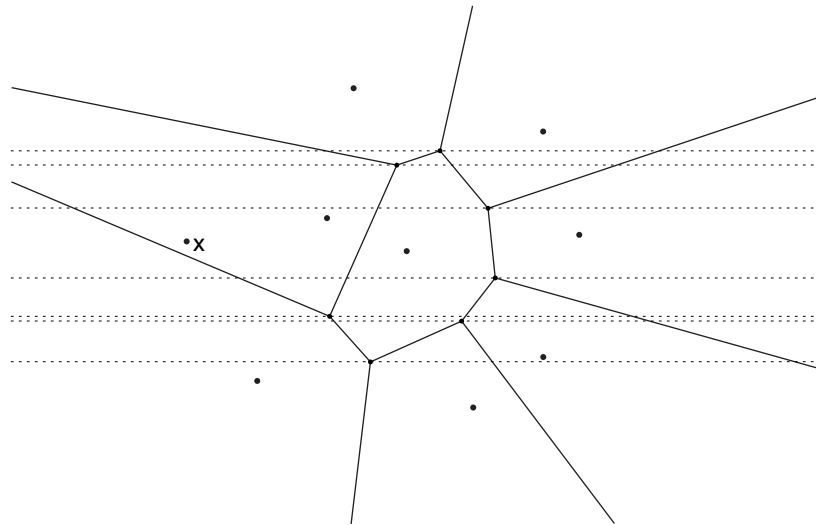
- Datenstruktur: Anfragepunkt  $x \in \mathbb{R}^2$
- Streifenmethode: Einteilung in Streifen, Ablegen in Baum
- Zugriff: 1. Nach  $Y$ -Koordinate, 2. Segment-Abschnitte





# Nächstes Postamt: Streifenmethode

- Datenstruktur: Anfragepunkt  $x \in \mathbb{R}^2$
- Streifenmethode: Einteilung in Streifen, Ablegen in Baum
- Zugriff: 1. Nach  $Y$ -Koordinate, 2. Segment-Abschnitte
- Jeweils  $O(\log n)$ !



# Nächstes Postamt: Streifenmethode

Theorem 5.6 Zu  $n$  Orten in der Ebene kann mittels des Voronoi-Diagrammes eine Datenstruktur aufgebaut werden, die für jeden Anfragepunkt, den nächstgelegenen Ort in  $O(\log n)$  bestimmen läßt.

**All nearest neighbors! Untereinander!**

# All nearest neighbors! Untereinander!

Nächster Nachbar liegt in Nachbarzelle!

# All nearest neighbors! Untereinander!

Nächster Nachbar liegt in Nachbarzelle!

Lemma 5.7 Sei  $S = P \cup Q$  eine Zerlegung der endlichen Punktmenge  $S$  in zwei disjunkte, nicht-leere Teilmengen  $P$  und  $Q$ . Seien  $p_0 \in P$  und  $q_0 \in Q$  so gewählt, da

$$|p_0q_0| = \min_{p \in P, q \in Q} |pq|$$

gilt. Dann haben die Regionen von  $p_0$  und  $q_0$  im Voronoi-Diagramm  $V(S)$  eine gemeinsame Kante.

# All nearest neighbors! Untereinander!

Nächster Nachbar liegt in Nachbarzelle!

Lemma 5.7 Sei  $S = P \cup Q$  eine Zerlegung der endlichen Punktmenge  $S$  in zwei disjunkte, nicht-leere Teilmengen  $P$  und  $Q$ . Seien  $p_0 \in P$  und  $q_0 \in Q$  so gewählt, da

$$|p_0q_0| = \min_{p \in P, q \in Q} |pq|$$

gilt. Dann haben die Regionen von  $p_0$  und  $q_0$  im Voronoi-Diagramm  $V(S)$  eine gemeinsame Kante.

Beweis:

# Weitere Anwendungen: All nearest neighbors!

## Weitere Anwendungen: All nearest neighbors!

Korollar 5.8 Jeder nächste Nachbar von  $p$  in  $S$  sitzt im Voronoi-Diagramm in einer Nachbarzelle, d.h. in einer Voronoi-Region, die mit  $VR(p, S)$  eine gemeinsame Kante besitzt.



## Weitere Anwendungen: All nearest neighbors!

Korollar 5.8 Jeder nächste Nachbar von  $p$  in  $S$  sitzt im Voronoi-Diagramm in einer Nachbarzelle, d.h. in einer Voronoi-Region, die mit  $VR(p, S)$  eine gemeinsame Kante besitzt.

Theorem 5.9 Ist das Voronoi-Diagramm  $V(S)$  vorhanden, kann in Zeit  $O(n)$  für alle  $p \in S$  der nächste Nachbar bestimmt werden.

## Weitere Anwendungen: All nearest neighbors!

Korollar 5.8 Jeder nächste Nachbar von  $p$  in  $S$  sitzt im Voronoi-Diagramm in einer Nachbarzelle, d.h. in einer Voronoi-Region, die mit  $VR(p, S)$  eine gemeinsame Kante besitzt.

Theorem 5.9 Ist das Voronoi-Diagramm  $V(S)$  vorhanden, kann in Zeit  $O(n)$  für alle  $p \in S$  der nächste Nachbar bestimmt werden.

Beweis:

## Weitere Anwendungen: All nearest neighbors!

Korollar 5.8 Jeder nächste Nachbar von  $p$  in  $S$  sitzt im Voronoi-Diagramm in einer Nachbarzelle, d.h. in einer Voronoi-Region, die mit  $VR(p, S)$  eine gemeinsame Kante besitzt.

Theorem 5.9 Ist das Voronoi-Diagramm  $V(S)$  vorhanden, kann in Zeit  $O(n)$  für alle  $p \in S$  der nächste Nachbar bestimmt werden.

Beweis: Durchlaufen des Diagramms!

## Weitere Anwendungen: All nearest neighbors!

Korollar 5.8 Jeder nächste Nachbar von  $p$  in  $S$  sitzt im Voronoi-Diagramm in einer Nachbarzelle, d.h. in einer Voronoi-Region, die mit  $VR(p, S)$  eine gemeinsame Kante besitzt.

Theorem 5.9 Ist das Voronoi-Diagramm  $V(S)$  vorhanden, kann in Zeit  $O(n)$  für alle  $p \in S$  der nächste Nachbar bestimmt werden.

Beweis: Durchlaufen des Diagramms! Jede Kante zweimal besuchen!