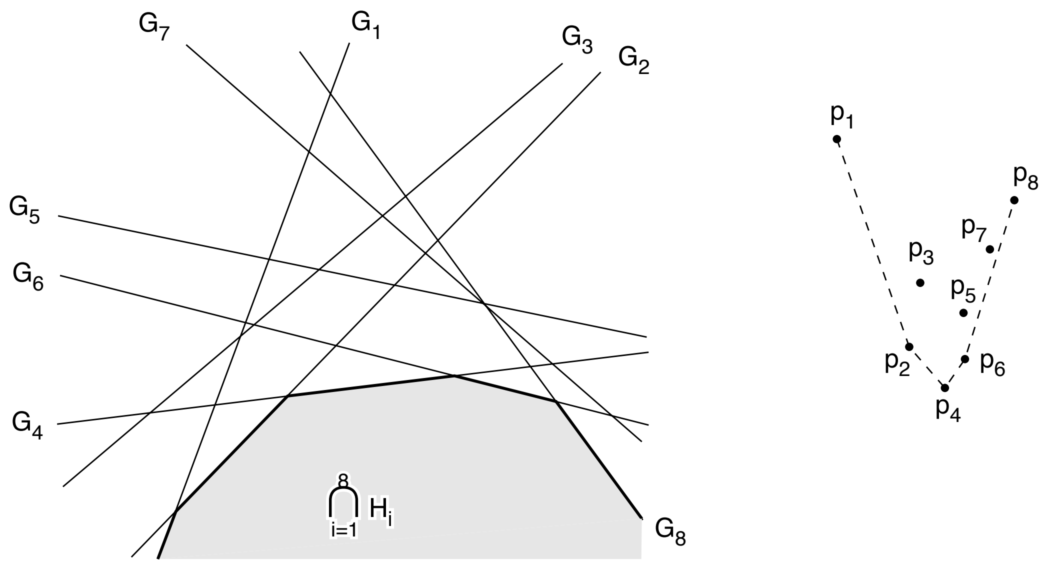
Zusammenfassung Durchschnitte und Sichtbarkeit

Elmar Langetepe
University of Bonn

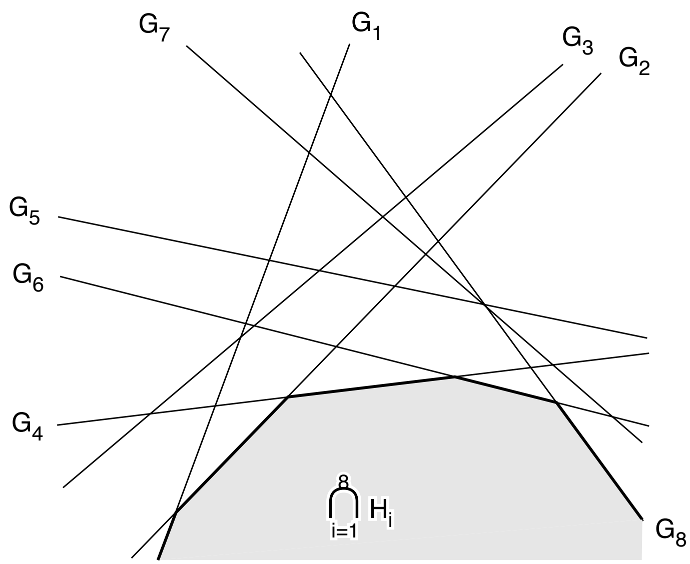
Durchschnitt von Halbgeraden/Konvexe Hülle

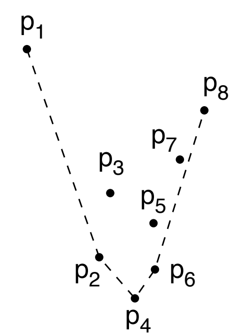
- n Geraden $G_i, 1 \leq i \leq n$, in der Ebene, nicht senkrecht
- $G_i = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y = a_i x + b_i\} = \{Y = a_i X + b_i\}$
- Durchschnitt der unteren Halbebenen $H_i = \{Y \leq a_i X + b_i\}$



Konvexe Hülle und Schnitt von Halbebenen

Theorem 4.10 Arrangement von n Geraden G_i:
$G_i \cap G_j$ ist Eckpunkt des Durchschnitts der unteren Halbebenen $\Longleftrightarrow$ das Liniensegment $G_i^* G_j*$ ist eine untere Kante der konvexen Hülle der Punkte G_i^*





Beweis: Dualität direkt anwenden!

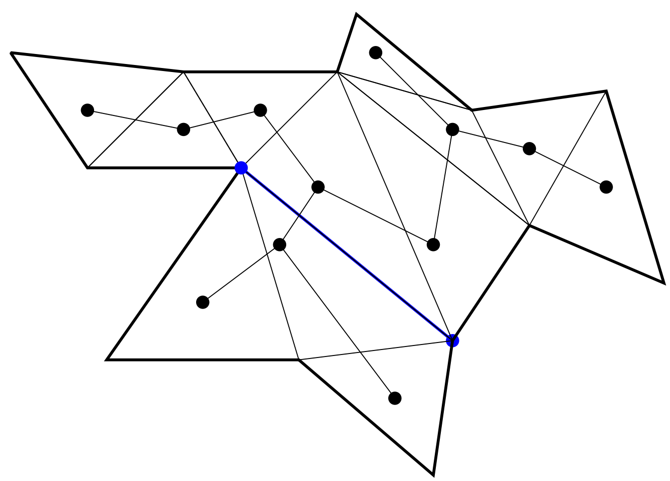
Ergebnisse

Korollar 4.11 Die Berechnung des Durchschnitts von n Halbebenen hat die Zeitkomplexität $\Theta(n \log n)$.

Korollar 4.12 Der Schnitt von n Halbebenen, deren Geraden nach Steigung sortiert sind, kann in Zeit $O(n)$ berechnet werden.

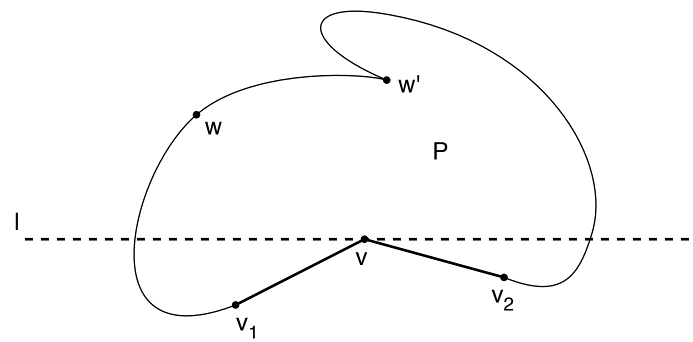
Triangulation

- Definition, Diagonale von P: Liniensegment $p_i p_j$ im Innern, das den Rand von P genau in p_i und p_j gemeinsam hat
- Definition, Triangulation von P: Maximale Menge sich nicht schneidender Diagonalen von P zusammen mit Rand
- DS: Folge von Dreiecken, Dual: Baum



Existenz von Diagonalen

Lemma 4.13: Ist P konvex, dann bildet jedes nicht-konsekutive Paar von Ecken eine Diagonale. Ist P nicht-konvex, und v eine beliebige spitze Ecke (Innenwinkel $> 180°$), dann gibt es eine Diagonale mit Eckpunt v.



Beweis! Konstruktiv geometrisch!

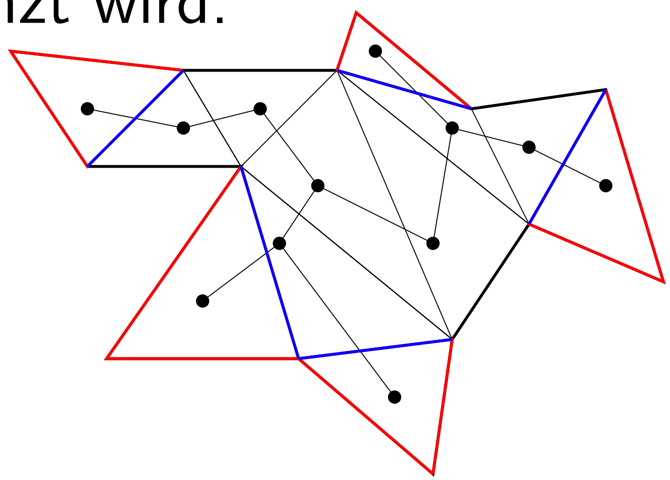
Damit Induktionsbeweise!

Lemma 4.14: Jedes einfache Polygon P kann trianguliert werden.

- Induktion über Anzahl $|P| = n$
- Ind. Anfg.: $n = 3$ fertig! Dreieck!
- Ind. Schluss: $|P| = n$, $n \geq 4$
- Lemma 4.13: Ex ex. stets mind. eine Diagonale d
- Aufteilung: P_1, P_2 entlang d, Ind. Ann. für P_1, P_2 und zusammensetzen

Existenz von *Ohren*

Theorem 4.16: In jeder Triangulation eines einfachen Polygons mit $n \geq 4$ Ecken, gibt es mindestens zwei Dreiecke, deren Rand nur von einer Diagonale begrenzt wird.



Beweis: Zählargument! a Ohren, b 2-Diag.-Dreiecke,
c 3-Diag.-Dreiecke
Gleichungen Anzahl Diagonalen/Dreiecke ergeben: $a \geq c + 2$

Strukturelle Aussagen: Anzahl Dreiecke/Diag., Dualer Graph

Bemerkung: Jede Triangulation von P mit $|P| = n$ hat $n - 2$ Dreiecke und $n - 3$ Diagonalen!

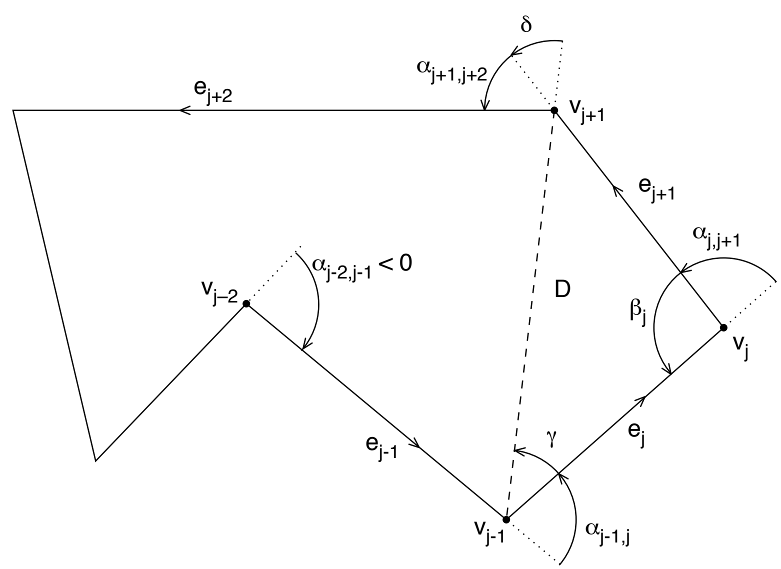
Beweis: Induktion, wie eben, an Diagonalen trennen! Oder *Ohrensatz* verwenden!

Lemma 4.15: Der *duale Graph* T^* ist ein Baum mit Knotengrad ≤ 3.

Beweis: Benutze *Ohrensatz!*

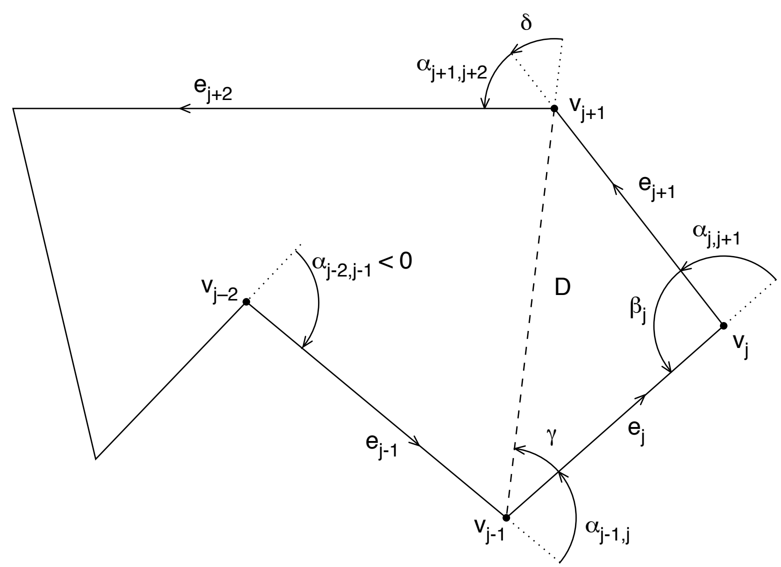
Anwendung: Turtle Geometry

- Dreieckstruktur ausnutzen, um Beweise zu führen!
- Drehwinkel zählen, nach Bedingung wieder abspringen
- Drehwinkel (CCW) $\alpha_{j,j+1}$, Drehwinkel-Summe:
  $\alpha_{i,k} = \alpha_{i,i+1} + \alpha_{i+1,i+2} + \ldots + \alpha_{k-1,k}$, Gesamtdrehung $\alpha_{i,i}$!



Triangulation: Anwendung Drehungen!

Lemma 4.17: Sei P ein einfaches Polygon und e_i eine beliebige Kante, dann gilt: $\alpha_{i,i} = 2\pi$.



Beweis: Induktion, ein *Ohr* abspalten, Winkel zählen, Nullsumme!

Berechnungskomplexität!

Chazelle 1991: $O(n)$ Algorithmus, Diagonalen!

Seidel 1995: $O(n \log^* n)$ Algorithmus (Vorlesung: Discrete and Computational Geometry)

Buch Kapitel

Kapitel 4.1.4 Seite 172 unten – S. 179 unten