Zusammenfassung: Graphengrundlagen

Elmar Langetepe
University of Bonn

Grundlagen Graphentheorie: Definitionen

- Definition: Graph, Menge V, $E \subseteq V \times V$, $G = (V, E)$
- Gerichteter Graph: Orientierung der Kanten
- Schlingen: Kanten (p, p) zulassen
- Mehrfache Kanten: (p, q), (p, q)
- Schlichte Graphen: Ohne Schlingen und mehrfache Kanten
- Geometrische Realisation: $G = (V, E)$ in $\mathbb{R}^2$ abbilden

  Knoten auf verschiedene Punkte abbilden

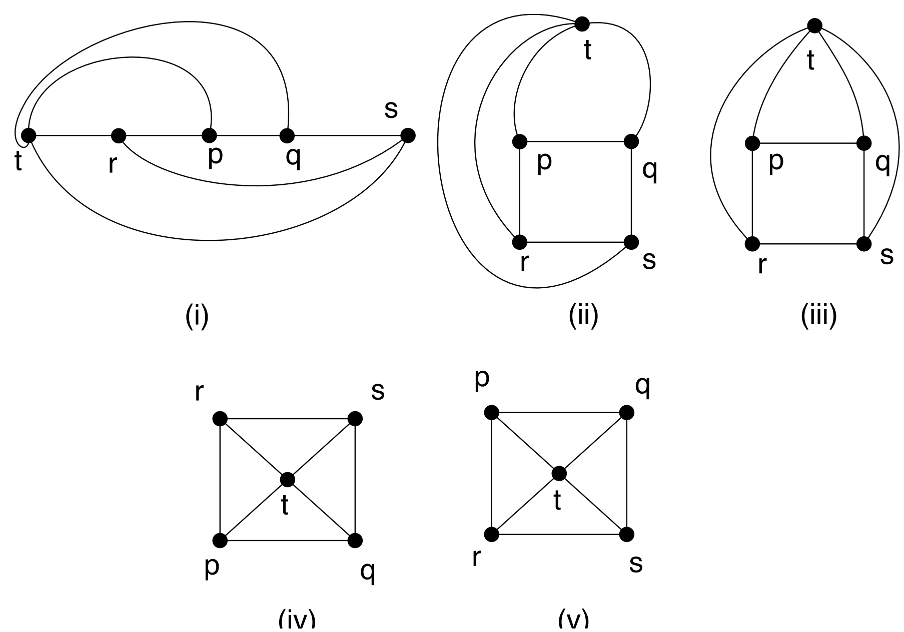
  Kanten auf einfache Wege abbilden

  Ergebnis: Geometrischer Graph $G' = (V', E')$
- Geometrischer Graph kreuzungsfrei:

  (Kanten)schnittfreie Realisation
- $G = (V, E)$ planar: Es ex. kreuzungsfreie geometrische Realisation

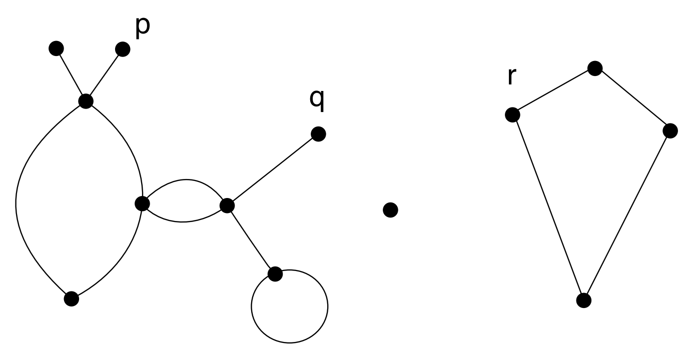
Geom. Realisation: Planare Graphen

- Äquivalente Realisationen: $G' = (V', E')$ und $G'' = (V'', E'')$
  (V', E') durch verschieben der Punkte, Verformung der Wege in (V'', E'') überführen, ohne Wege über Knoten zu *heben*
- Nur i) und ii) sind äquivalent!



Kreuzungfr. geometr. Graph: Bezeichnungen

- v Anzahl Knoten (Vertex)
- e Anzahl Kanten (Edge)
- f Anzahl Flächen (Face) (Zs.-hangskomp. von $\mathbb{R}^2 \setminus G$)
- c Anzahl Zusammenhangskomponenten von G (Component)



Kreuzungfreier geometrischer Graph: Eulerformel

Theorem 1.1 Sei G ein kreuzungfreier geometrischer Graph im $\mathbb{R}^2$. Dann gilt: v-e+f=c+1.

Beweis: Strukturelle Induktion! Graphen aufbauen!

Einfache nützliche Folgerungen

Korollar 1.2 Sei G ein kreuzungfreier geometrischer Graph, dessen Knoten den Grad ≥ 3 haben. Es gilt:

$$\begin{aligned} v &\leq \frac{2}{3}e \\ v &\leq 2(f-c-1) < 2f \\ e &\leq 3(f-c-1) < 3f. \end{aligned}$$

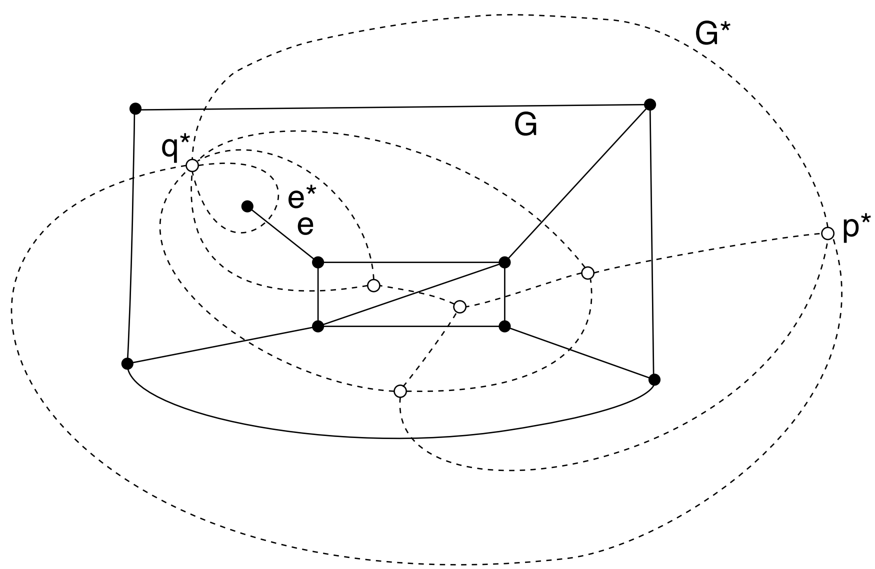
Der Rand einer Fläche hat im Mittel ≤ 6 Kanten.

Beweis: Zählargumente und Eulerformel!

Dualer Graph

Nichtleerer, kreuzungsfreier, zusammenhängender, geometrischer Graph $G = (V, E)$. Dualer Graph G^*

- Wähle Punkt p_F^* im Innern jedes Fs
- Für jede Kante e von G mit angrenzenden Flächen F_1 und F_2: Bilde Kante zwischen $p_{F_1}^*$ und $p_{F_2}^*$ die nur e kreuzt



Umkehrung für schlichte Graphen

Korollar 1.3 G kreuzungsfrei, nichtleer und schlicht, Grad der Knoten ≥ 3: Dann ist $f \leq \frac{2}{3}e$ und $f < 2v$.

Beweis! 1. Teil direkt! 2. Teil Dualer Graph und Korolar 1.2

Folgerung aus Eulerformel

K_5: *Vollständiger* Graph mit 5 Knoten.

Bemerkung: K_5 ist nicht planar!

Beweis: $v = 5$, $e = 10$, $c = 1$, $f = ?$

Formel: $v - e + f = c + 1$

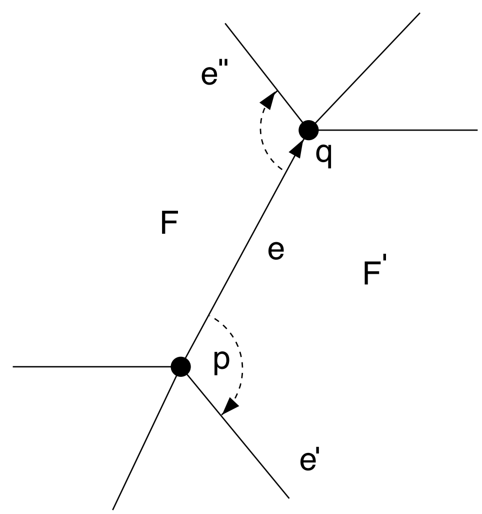
$5 - 10 + f = 2$ oder $f = 7$ aber schlicht!

$f \leq \frac{2}{3}e$

Widerspruch $21 \not\leq 20$!

Datenstrukturen

- Kreuzungsfrei geometrisch, geradliniege Kanten
- Abspeichern und Umlaufen (z.B. Flächen)
- Doubly Connected Edge List: Verweislisten
- Adjazenzlisten, viele Andere, 3D



Buch Kapitel

Kapitel 4.4 Seite 199 mitte – S. 202 unten

Kapitel 1.2.2 Seite 12 unten – S. 19 unten