

## Übungsblatt 2

### Aufgabe 2.1

6 Punkte

Sei  $A$  ein Markierungsalgorithmus für einen Cache der Größe  $k$ . Wir wollen die durch  $A$  verursachten Kosten mit den Kosten eines optimalen Paging-Algorithmus, dem nur ein Cache der Größe  $h \leq k$  zur Verfügung steht, vergleichen. Zeigen Sie, dass für eine geeignete Konstante  $\tau$

$$w_A(\sigma) \leq \frac{k}{k-h+1} \cdot \text{OPT}_h(\sigma) + \tau$$

für alle Sequenzen  $\sigma$  gilt.

### Aufgabe 2.2

6 Punkte

Wir betrachten in dieser Aufgabe den Spezialfall des Paging-Problems, in dem es insgesamt nur  $k+1$  viele verschiedene Seiten  $0, 1, \dots, k$  gibt. Wir untersuchen den Online-Algorithmus  $A$ , der bei einem Seitenfehler bei einem Zugriff auf Seite  $i$  die Seite  $(i+1) \bmod (k+1)$  verdrängt. Zeigen Sie, dass  $A$   $k$ -kompetitiv ist.

### Aufgabe 2.3

5+1 Punkte

Wir betrachten ein realistischeres Pagingmodell, bei dem jeder Cache-Zugriff Kosten 1 verursacht und bei einem Seitenfehler zusätzliche Kosten von  $s$  entstehen, um die Seite aus dem Hauptspeicher zu holen. Für eine Sequenz  $\sigma$  mit  $\ell \geq 2$  Phasen bezeichne  $L(\sigma)$  die durchschnittliche Phasenlänge der ersten  $\ell-1$  Phasen.

- (a) Zeigen Sie, dass für jeden Markierungsalgorithmus  $A$  die Ungleichung

$$w_A(\sigma) \leq \left(1 + \frac{(k-1) \cdot s}{L(\sigma) + s}\right) \cdot \text{OPT}(\sigma) + \tau$$

für eine geeignete Konstante  $\tau$  gilt. Welcher kompetitive Faktor lässt sich daraus für Markierungsalgorithmen folgern?

- (b) Welchen Einfluss hat  $L(\sigma)$  auf das Verhältnis von  $w_A(\sigma)$  und  $\text{OPT}(\sigma)$  im ursprünglichen Kostenmodell, in dem Cache-Zugriffe keine Kosten und Hauptspeicherzugriffe Kosten von 1 verursachen?

### Aufgabe 2.4

Präsenzaufgabe

Wir betrachten das sogenannte *Coupon Collector's Problem*: Anlässlich der Fußball-Weltmeisterschaft werden Sammelbilder auf den Markt gebracht, die nicht gezielt erworben, sondern nur einzeln in verschlossenen Tüten gekauft werden können. Insgesamt gibt es  $n$  verschiedene Motive. In jeder Tüte befindet sich unabhängig und uniform zufällig eins davon.

Wie viele Tüten muss ein Sammler im Erwartungswert kaufen, bis er alle Motive zusammen hat?