

Aufgabe 32: Rekursiv aufzählbare Sprachen (4 Punkte)

Sei Σ ein Alphabet und L_1 und L_2 zwei rekursiv aufzählbare Sprachen über Σ , die nicht rekursiv sind. Zeigen Sie oder widerlegen Sie:

1. Die Sprache $L_1 \cup L_2$ ist wieder rekursiv aufzählbar.
2. Das Komplement von L_1 , nämlich $\Sigma^* \setminus L_1$ ist rekursiv aufzählbar.

Aufgabe 33: Nicht rekursiv aufzählbare Sprachen (4 Punkte)

Beweisen Sie, dass die Sprache

$$L_D = \left\{ x \in \{0, 1, \#\}^* \mid \begin{array}{l} x = \langle M \rangle \text{ und } M \text{ ist DTM, die bei} \\ \text{Eingabe von } x \text{ nicht hält} \end{array} \right\}$$

nicht rekursiv aufzählbar ist.

Aufgabe 34: Entscheiden vs. Akzeptieren (4 Punkte)

Sei L die Sprache der Wörter, die nur aus Einsen bestehen, also

$$L = \{1^j \mid j \geq 0\}.$$

Betrachten Sie die Turingmaschine $M = \{\Sigma, Q, q_0, \delta, F\}$ mit $\Sigma = \{\$, \#, 0, 1, \sqcup\}$, $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ und $F = \{q_3\}$, und Übergangsfunktion δ :

δ	0	1	\sqcup	#	\$
q_0	$(q_1, 0, R)$	$(q_0, 1, R)$	$(q_3, 1, N)$	$(q_1, \#, R)$	$(q_0, \$, R)$
q_1	$(q_1, 0, L)$	$(q_2, 1, R)$	$(q_1, 1, L)$	$(q_1, \#, N)$	$(q_2, \$, R)$
q_2	$(q_1, 0, R)$	$(q_2, 1, R)$	$(q_1, 1, L)$	$(q_2, \#, L)$	$(q_1, \$, R)$
q_3	—	—	—	—	—

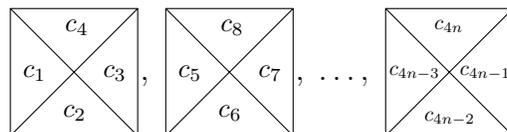
Gehen Sie davon aus, dass das $\$$ -Symbol nur am Bandanfang steht, und dass die Eingabe am Anfang der Berechnung lückenlos (ohne \sqcup s) am Anfang von Band 1 steht.

1. Akzeptiert M die Sprache L ? Begründen Sie Ihre Antwort. Wenn M die Sprache L nicht akzeptiert, dann modifizieren Sie M so, dass M die Sprache L akzeptiert.
2. Entscheidet M die Sprache L ? Begründen Sie Ihre Antwort. Wenn M die Sprache L nicht entscheidet, dann modifizieren Sie M so, dass M die Sprache L entscheidet.

Eine Modifikation von M darf nur dergestalt sein, dass maximal ein weiterer Zustand q_4 zu Q und ggf. zu F hinzugefügt wird. Die Zustandsübergänge von q_4 dürfen nach Belieben gewählt werden, bei jedem schon existierenden Eintrag in der Zustandsübergangstabelle dürfen lediglich die Folgezustände geändert werden.

Aufgabe 35: Dominosteine (Präsenzaufgabe)

In der Vorlesung haben wir gelernt, dass das *Postsche Korrespondenzproblem* unentscheidbar ist. Dieses Problem ist eine Art Dominostein-Problem. Bei diesen gilt es zu entscheiden, ob eine vorgegebene Menge von Dominosteinen so angeordnet werden kann, dass eine Bedingung erfüllt ist. Wir wollen in dieser Aufgabe ein paar entscheidbare Varianten von Dominostein-Problemen kennenlernen. Die Aufgabe ist in allen im Folgenden vorgestellten Varianten zu entscheiden, ob ein vorgegebenes Gebiet mit einer gegebenen endlichen Menge an Dominosteinen *gepflastert* werden kann. Wir sagen eine endliche Menge von Dominosteinen



pflastert ein bestimmtes Gebiet G , wenn man Kopien der Steine so in G anordnet kann, dass G komplett überdeckt ist, und sich nur Flächen mit gleichen Farben (hier durch Zahlen symbolisiert) berühren. Jeder Steintyp

aus dem endlichen Vorrat kann beliebig oft, auch unendlich oft verwendet werden. Man beachte jedoch, dass es bei der Grundversion des Problems nicht erlaubt ist, die Steine zu drehen oder zu spiegeln. Links bleibt links und oben bleibt oben.

Begründen Sie für die folgenden Varianten des Dominostein-Problems, dass sie entscheidbar sind. Bei diesen komplexeren Problemen sollen Sie nicht mehr versuchen, die Entscheidbarkeit durch Angabe einer konkreten Turingmaschine (oder durch Programmcode) nachzuweisen. Es genügt eine abstrakte Erklärung des Berechnungsverfahrens. Dennoch muss klar sein, wie der Algorithmus genau arbeitet, so dass er im Prinzip auch auf Turingmaschinen programmiert werden könnte.

Bei Varianten 1 und 2 soll jeweils entschieden werden, ob die gesamte Ebene \mathbb{R}^2 mit einer gegebenen endlichen Menge an Dominosteinen gepflastert werden kann.

1. Bei der ersten Variante ist es erlaubt, neben den gegebenen Dominosteinen von jedem Dominostein ebenfalls beliebig viele (um ganzzahlige Vielfache von 90°) gedrehte Kopien der gegebenen Dominosteine zu verwenden.
2. Bei der zweiten Variante ist Drehen wieder verboten. Jedoch ist die betrachtete Mengen von Steinen eingeschränkt. Es sollen nur Steine betrachtet werden, die jeweils oben und unten die Farbe 0 haben.
3. Jetzt betrachten wir wieder alle möglichen Mengen von Dominosteinen, und Drehen ist verboten. Ist dann entscheidbar, ob eine gegebene Steinmenge für ein gegebenes $m \in \mathbb{N}$ ein Quadrat aus $m \times m$ Zellen pflastert?