

Übungsblatt 7

Aufgabe 7.1

5 Punkte

Im Beweis von Theorem 4.10 haben wir ausgenutzt, dass es eine Konstante τ gibt, die nur von k und der Metrik $\mathcal{M} = (M, d)$ abhängt, für die $d_T(DC_T(\sigma)) \leq k \cdot d_T(\text{OPT}_T(\sigma)) + \tau$ für jede Baummetrik $\mathcal{M}_T \in \mathcal{S}$ gilt. Zeigen Sie, dass diese Ungleichung für $\tau = 12k^2\Delta$ mit $\Delta = \max_{x,y \in M} d(x, y)$ erfüllt ist.

Aufgabe 7.2

5 Punkte

Eine Instanz des k -Median Problems besteht aus einer Punktmenge $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ und einer Metrik d . Das Ziel ist es, eine Menge $M \subseteq V$ von k Medianpunkten zu finden, sodass die Summe der Distanzen aller Knoten zu den nächsten Medianpunkten, d.h.

$$\sum_{i=1}^n \min_{w \in M} d(v_i, w)$$

minimal ist. Optimale Algorithmen für Bäume mit polynomieller Laufzeit sind bekannt. Zeigen Sie, dass das k -Median Problem für beliebige Metriken durch einen randomisierten Algorithmus mit Approximationsgüte $O(\log n)$ gelöst werden kann.

Aufgabe 7.3

5 Punkte

Sei $\mathcal{M} = (M, d)$ eine Baummetrik. Wir können die Metrik \mathcal{M} durch einen vollständigen gewichteten Graphen G mit Knotenmenge M beschreiben. Es sei T ein Baum in diesem Graphen G , der die Metrik \mathcal{M} induziert. Zeigen Sie, dass der Baum T ein minimaler Spannbaum und sogar der einzige minimale Spannbaum von G ist.

Aufgabe 7.4

5 Punkte

Geben Sie einen randomisierten $O(\log N)$ -Approximationsalgorithmus für das metrische Traveling Salesperson Problem mit polynomieller Laufzeit an, der auf Einbettungen basiert, wobei N die Anzahl der Punkte des metrischen Raumes sei.