AlgGeo 10.1

Do 9.5: keine Vorlesung

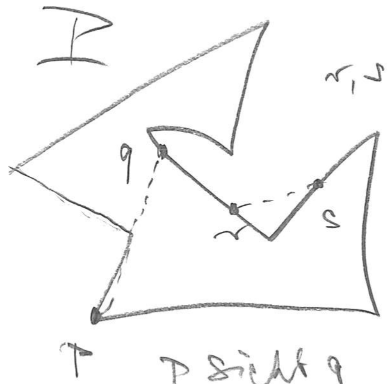
Mo 13.5.: 16 Uhr Ersatztermin: Seminarraum 2-078

Haben Polygone trianguliert:
- Bei einfachen Polygon mit n Ecken: $n-2$ Dreiecke
- $O(n)$; $O(n \log^* n)$ im Mittel

In 3D? Polyeder in Tetraeder zerlegen → nächste Seite oder Bilder im Buch

Kapitel 4: Sichtbarkeit

P einfaches Polygon mit n Ecken, abgeschlossen



p sieht q

r, s sind nicht gegenseitig sichtbar

Def: $p, q \in P$ sehen einander $:\Longleftrightarrow \overline{pq} \subset P$

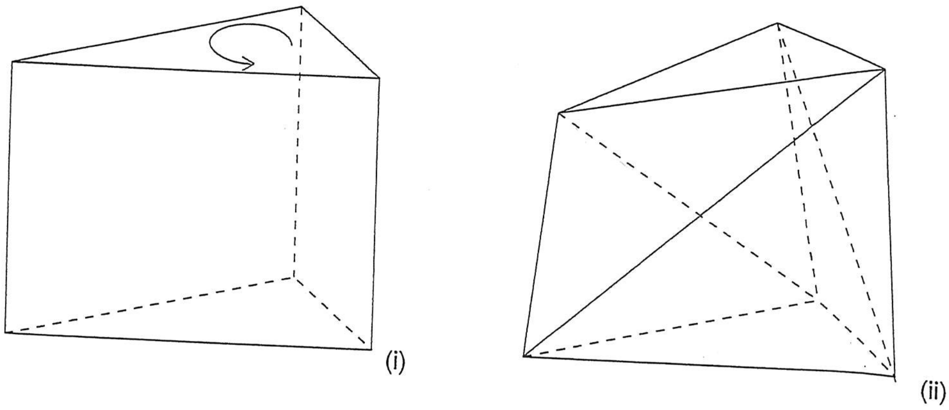
symmetrisch

Def: $p \in P$: $\mathrm{vis}_P(p) := \{q \in P ;\ p \text{ sieht } q\}$

heißt das Sichtbarkeitspolygon von p in P

AlgGeo 10.2

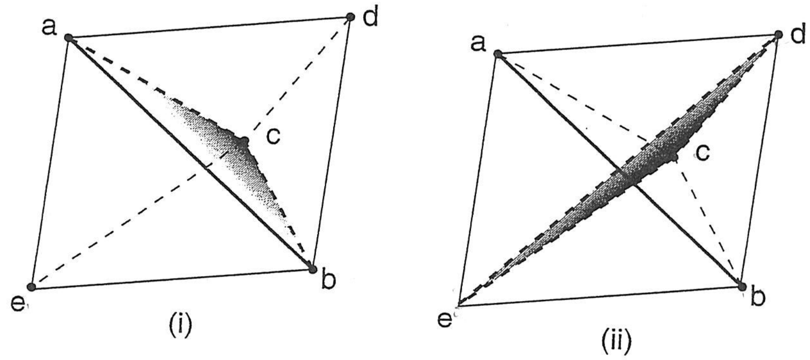
31.



Zerlegung in Tetraeder nicht immer möglich

Abb. 4.19 Nach Verdrehen des Prismas ist keine Zerlegung in Tetraeder mehr möglich, weil die untere Dreiecksfläche von keiner der oberen drei Ecken ganz sichtbar ist.

2 Tetraeder



3 Tetraeder

Abb. 4.20 Zwei verschiedene Tetraeder-Zerlegungen eines konvexen Polyeders.

Zu entscheiden, ob eine Zerlegung in Tetraeder existiert, ist NP-hart.

Alg Geo 10.3

Beobachtung:

vis(p) hat höchstens n Kanten.

- für jede künstliche Kante ist eine Originalkante von P nicht mehr sichtbar
- von Originalkante kann maximal ein Segment sichtbar sein, weil P einfach ist $\square$

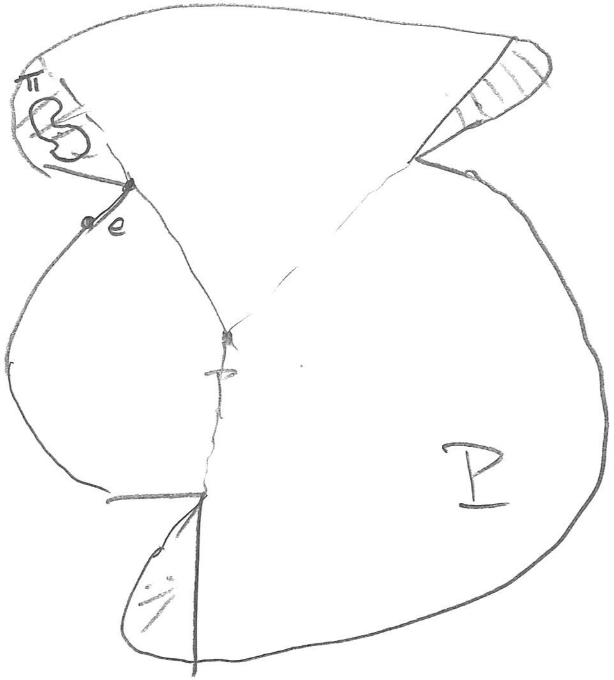
Frage: Wenn ein mobiler Wächter auf einer Rundtour π in P ganz ∂P gesehen hat, hat es dann auch jeden inneren Punkt gesehen?

Antw: Ja. Bew indirekt: angenommen, es gibt inneren Punkt p, der von π aus nicht sichtbar ist.

$\overset{\text{Sicht symm.}}{\Longrightarrow}$ p sieht ganz π nicht

Betrachte vis(p):

AlgGeo 10.4

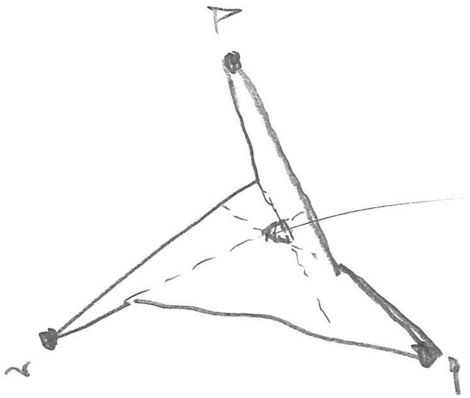


<u>Klar:</u> Punkt von π muß in einer der Höhlen von vis(p) liegen

$\Rightarrow$ π kann Kante e nicht sehen ↯ Var.

im Bild

<u>Frage:</u> Wenn stationäre Wächter ganz ∂P sehen, können sie dann auch das Innere von P sehen?



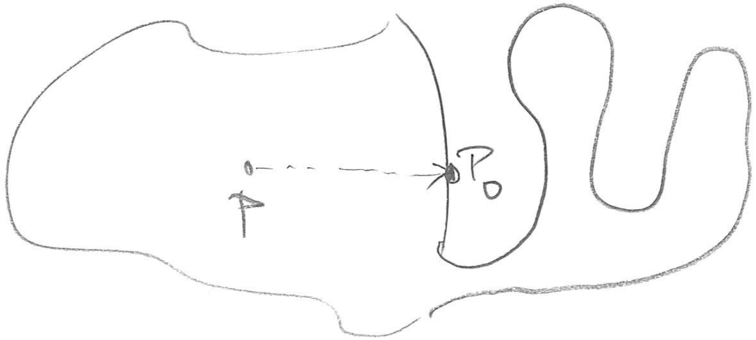
Klar: p, q, r sehen ∂P

von keinem der Punkte p, q, r sichtbar.

Alg Geo 10.5

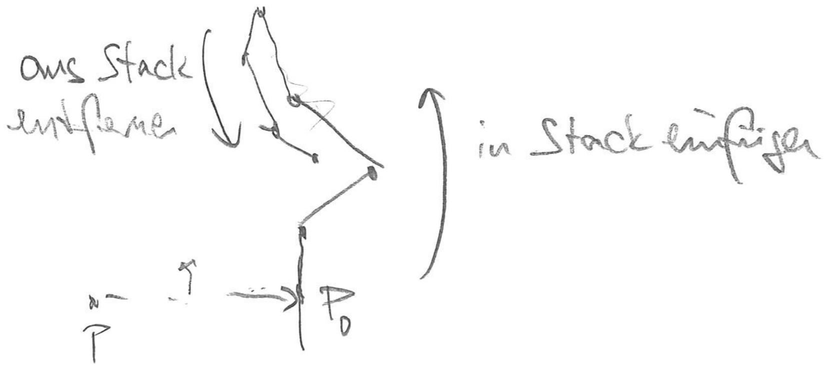
Theorem 4.19 $vis_P(p)$ kann man in Zeit $O(n)$ aus P berechnen.

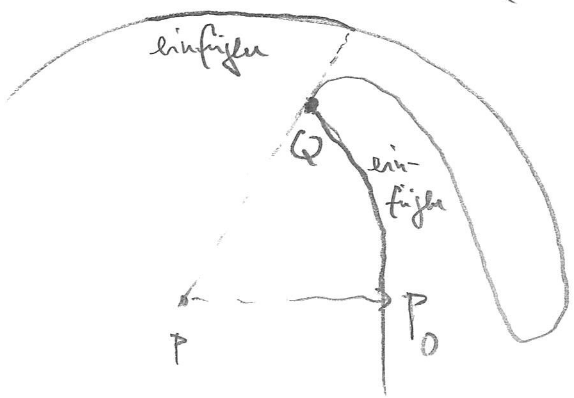
Beweisskizze: Sei p_0 der von p aus nach rechts sichtbare Punkt von ∂P

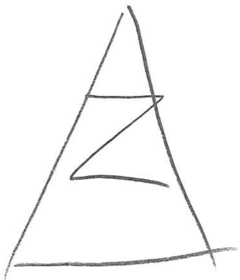


$O(n)$

Idee: laufe von p_0 gegen Uhrzeiger um ∂P herum, verwalte sichtbare Stücke des Randes in Stack



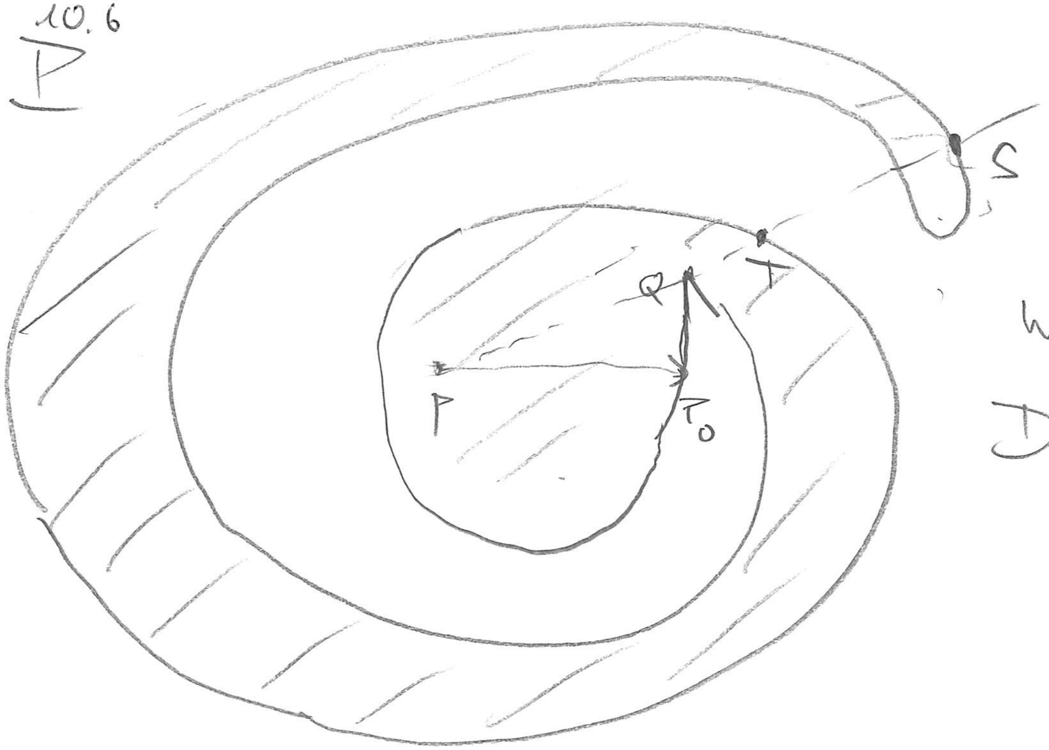




Problem bei

AlgGeo 10.6

$\underline{P}$



nicht bei S fortfahren,
sondern bei T

Wie kann man S von T unterscheiden?

Drehwinkel um p ab Q:

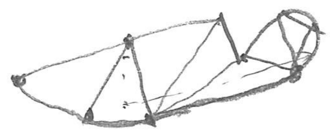
bis S: -2π

bis T: 0 $\square$

Hinweis: vis(p) wird nicht aus Karte berechnet,
sondern in Umgebung mit Sensoren erfasst

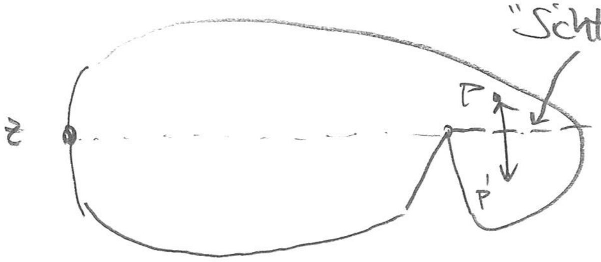
Trotzdem interessant: Wieviele "unterschiedliche" Sichten kann es in einem einfachen Polygon mit n Ecken geben?

Def.: p, q haben äquivalente Sicht :$\Leftrightarrow$ p und q sehen dieselben Eckpunkte von $\underline{P}$



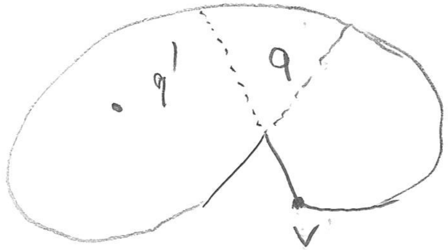
Alg Geo 10.7

<u>Ansatz</u>: "Locus approach": Fasse alle Punkte zusammen, für die die Antwort (hier: die sichtbaren Ecken) dieselbe ist



p sieht z

p' sieht z nicht



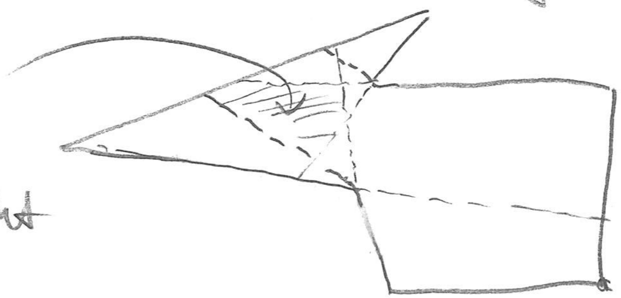
q sieht v

q' sieht v nicht

Einteilung des kompletten Polygons in Regionen äquivalenter Sicht:

Faces:

≙ Regionen äquivalenter Sicht



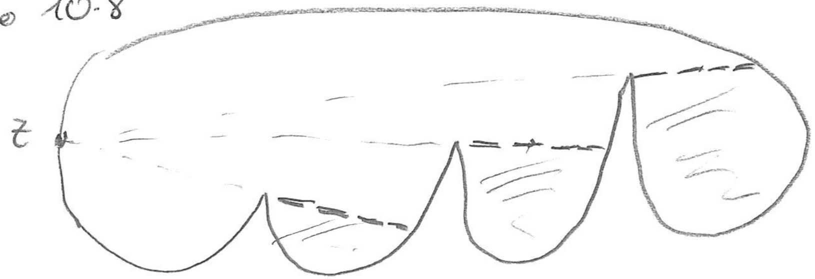
Wieviele?

Jeder Eckpunkt (n) kann maximal mit jeder spitzen Ecke (n) ein Sichtsegment bilden

$\to$ es gibt $O(n^2)$ Sichtsegmente

es gibt $O(n^4)$ Kreuzungen. Zu groß!!

AlgGeo 10.8



Beobachtung: innere Punkte verschiedener von z ausgehender Sichtsegmente können einander nicht sehen

$\Rightarrow$ kein anderes Sichtsegment kann ≥ 2 von ihnen kreuzen

$z \longmapsto O(n^2)$ Kreuzungen

$\Rightarrow$ insgesamt gibt es $O(n^3)$ viele Kreuzungen von Sichtsegmenten

$\Rightarrow$ die Aufteilung in Regionen äquivalenter Sicht hat nur $O(n^3)$ viele Regionen.
Euler

<u>Verschärfung</u>: $O(n^2 \cdot r)$, $r = \#$ spitzer Ecken

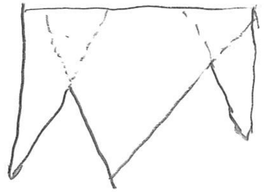
<u>Heute</u> SLAM: Simultaneous Location and Mapping

4.4 Kern eines einfachen Polygons

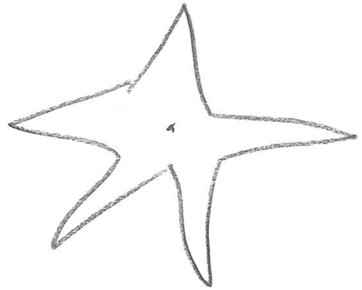
Wann reicht 1 stationärer Wächter aus, um ganz P zu bewachen?

Alg Geo 10.9

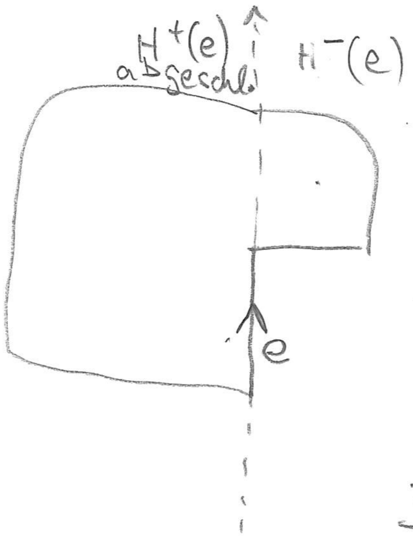
$\mathrm{Ker}(P) := \{p \in P \,;\; \mathrm{vis}_P(p) = P\}$ kann leer sein z.B.



P sternförmig $:\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(P) \neq \emptyset$.



<u>Frage:</u> Wie kann man $\mathrm{Ker}(P)$ berechnen?



<u>P</u>

<u>Klar:</u> von $H^-(e)$ aus ist Kante e nicht sichtbar.

<u>Vermutung:</u> $\mathrm{Ker}(P) = \bigcap_{\substack{e \text{ Kante} \\ \text{von } P}} H^+(e)$ $(*)$

<u>Bew:</u> „$\subseteq$" ein $q \in H^-(e)$ kann e nicht sehen

„$\supseteq$" sei $p \in \bigcap_e H^+(e)$

<u>1. Fall:</u> $p \notin P$: sei q der zu p nächste Randpunkt von P

$\Rightarrow p \in H^-(e)$ ↯

<u>2. Fall</u> $p \in P$: angenommen, $p \notin \mathrm{Ker}(P)$

AlgGeo 10.10

$\Rightarrow$ vis(p) hat eine Höhle

$\Rightarrow$ $p \in H^-(e)$,

wobei e = erste Höhlenkante

Aus (*) folgt sofort: Ker(P) in Zeit $O(n \log n)$ durch Halbebenenschnitt

untere Kontur

Dualität, konvexe Hülle

<u>Hier</u>: Halbebenen nicht beliebig, sondern durch Kanten eines einfachen Polygons gegeben.

<u>Frage</u>: Kann das helfen?