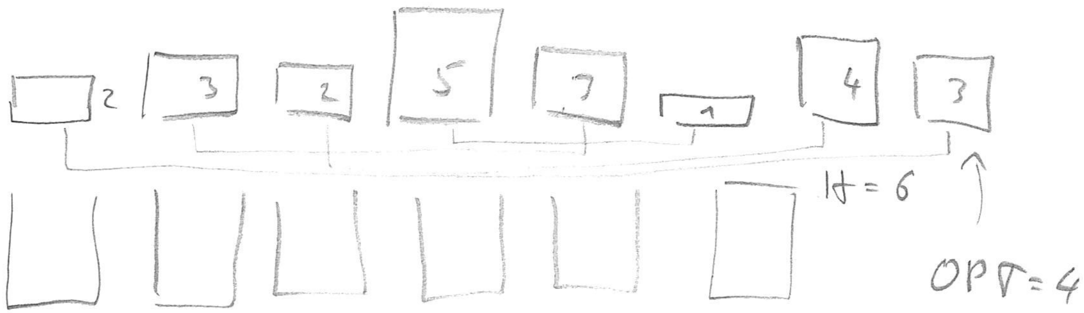
AlgGeo 15.1

Kompetitive Strategien

Beispiel: Bin-Packing

Gegeben:



Bins

alle gleich breit
unterschiedliche Höhen

alle gleiche Breite wie Obj.
fixe Höhe H

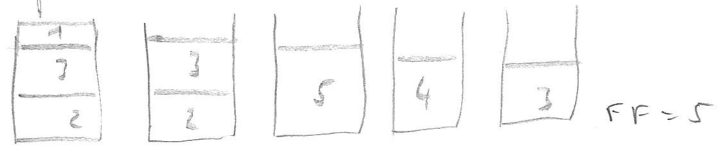
Wieviele Bins brauche ich, um alle Objekte einzupacken?

→ NP-hard

Naiv und schnell: First-Fit

Objekte der Reihe nach in den erstbesten Behälter

Beispiel oben



T: 7.9. FF benötigt höchstens doppelt so viele Bins wie OPT.

Beweis: Angenommen FF braucht $m+1$ Behälter

⇒ m dieser Behälter sind min. halbvoll

⇒ Objekte in diesen m Behälter haben in Summe $\frac{m \cdot H}{2}$ Höhe

⇒ min $\frac{m}{2}$ Behälter brauchen. □

Vorteil: Funktioniert in "on-line" Bedingungen

→ Anzahl & Höhen zukünftiger Objekte unbekannt sind.

AlgGeo W. 2

Maß für die Güte von Online-Strategien

Def: Π := Problem

$P \in \Pi$:= Instanz von Π

$K_{opt}(P)$:= optimale Lösung von P

S := online Strategie für Π mit $K_S(P)$

S ist C-kompetitiv, wenn es eine Zahl A gibt, sodass $\forall$ Instanzen P gilt

$$K_S(P) \leq C \cdot K_{opt}(P) + A$$

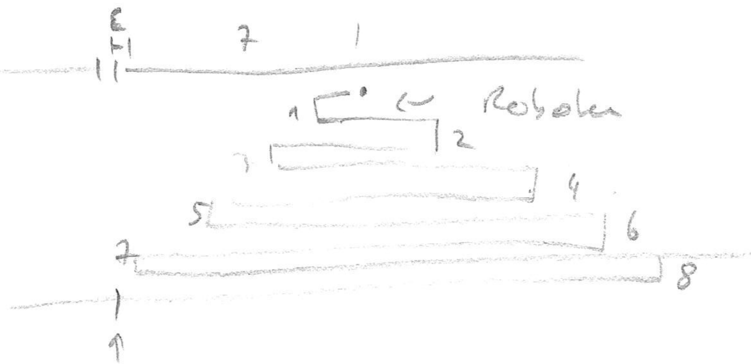
↑ "kompetitive Faktor", idealerweise klein und konstant.

Türsuche-Problem

Roboter mit Tastsensor

Strategie?

→ muss immer die Richtung wechseln



OPT: $7 + \varepsilon$

$l + \varepsilon$

$K_S = 1+1+2+2+3+3 \dots 7+7+8+8+7+\varepsilon$

$\dots + l + l + (l+1) + (l+1) + l + \varepsilon$

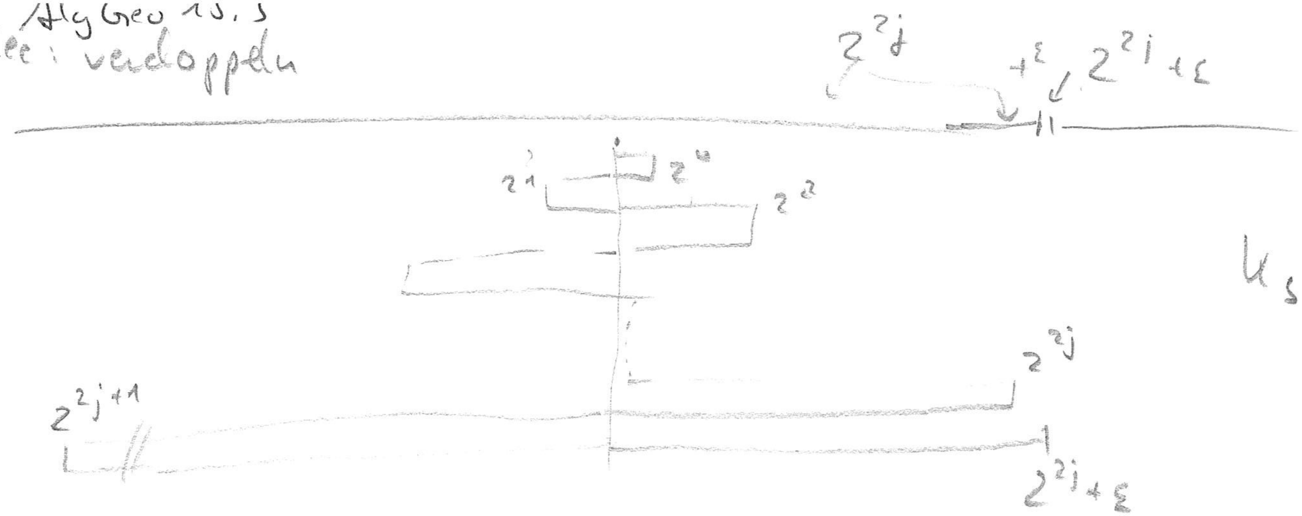
$= 2 \sum_{i=1}^{l+1} i + l + \varepsilon$

$= (l+1)(l+2) + l + \varepsilon$

$= \Theta(l^2)$!! nicht konstant

AlgGeo 15.5

Idee: verdoppeln



$OPT = \ell + \varepsilon = 2^{2j} + \varepsilon$

$$K_S = 2 \sum_{i=0}^{2j+1} 2^i + 2^{2j} + \varepsilon$$

$$= 2(2^{2j+2} - 1) + 2^{2j} + \varepsilon$$

$$= 9 \cdot 2^{2j} - 2 + \varepsilon \leq 9 \cdot 2^{2j} < 9\underbrace{(2^{2j}+\varepsilon)}_{OPT}$$

Initial-Randfall

$OPT = \varepsilon$

$K_S = 2 + \varepsilon < 9\varepsilon + 2$ ← A ✓

⇒ Verdoppeln ist 9-kompetitiv.

T 7.11. Verdoppeln ist optimal, d.h. besser als 9-kompetitiv geht nicht.

Beweis per Widerspruch: Angenommen es gibt Strategie mit $C < 9$.

beliebige Strategie S_n: f_1 f_2 f_3 .... f_n f_{n+1} ... Klar $f_i > 0$

Suchtiefen → rechts, links $\qquad f_i > f_{i-2}$

$$2 \cdot \sum_{i=1}^{n+1} f_i + f_n + \varepsilon \leq C \cdot (f_n + \varepsilon) + A$$ ← allg. Fall wo die Tür bei f_n gerade so verpasst wurde.

muss auch gelten mit $\varepsilon = 0$, erstmal $A = 0$

Alg Geo 15.4

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n-1} f_i + f_{n+1} \le \underbrace{\left(\frac{c-3}{2}\right)}_{:= H} \cdot f_n$$

$$f_{n+1} \le H \cdot f_n - \sum_{i=1}^{n-1} f_i$$ zu beweisen $H \ge 3 \Rightarrow c \ge 9$

$$\approx f_n \le H \cdot f_{n-1} - \sum_{i=1}^{n-2} f_i$$ einsetzen

$$f_{n+1} \le H^2 f_{n-1} - H \cdot \sum_{i=1}^{n-2} f_i - \sum_{i=1}^{n-1} f_i = (H^2 - 1) \cdot f_{n-1} - (H+1) \sum_{i=1}^{n-2} f_i$$

$\leadsto$ beliebig oft weitermachen

$$f_{n+1} \le a_m \cdot f_{n-m} - b_m \cdot \sum_{i=1}^{n-1-m} f_i$$ gilt für $n \ge 1$ und $0 \le m \le n-1$

Koeffizienten sind rekursiv definiert

$m = 0$ $\quad a_0 = H$ $\quad b_0 = 1$ $\quad \leftarrow$ gesucht: geschlossene Form

$m \ge 1$ $\quad a_{i+1} = a_i \cdot H - b_i$ $\quad b_{i+1} = a_i + b_i$

L. 7. 12 Alle a_i immer positiv.

Betrachte beliebiges $i \ge 0$

$$f_{i+2} \le a_i f_1 - b_i \cdot 0$$ $\Rightarrow$ aber alle f_n positiv $\lightning$

AlgGeo 15.5

Trick: lineare Rekursion $\hat{=}$ Matrixmultiplikation

$$\begin{pmatrix} a_{i+1} \\ b_{i+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} H & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} = \dots\dots = \begin{pmatrix} H & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{i+1} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

Angenommen wir könnten $\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$ als $v_1 V_1 + v_2 V_2$ schreiben

Eigenvektoren V_1 mit Eigenwert z_1

$\Rightarrow M \cdot V_j := z_j V_j$

Dann wäre $\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} = M^i \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = M^i (v_1 V_1 + v_2 V_2)$

$= v_1 M^i V_1 + v_2 M^i V_2 = v_1 z_1^i V_1 + v_2 z_2^i V_2 \leadsto$ geschlossene Form

M hat charakteristisches Polynom für das Nullstellen = Eigenwerte von M.

$$\det(\underset{\substack{\uparrow \\ 2\times 2 \text{ Einheitsmatrix}}}{t \cdot E} - M) = \begin{vmatrix} t-H & 1 \\ -1 & t-1 \end{vmatrix} = t^2 - (H+1) \cdot t + H + 1$$

$\hookrightarrow$ Nullstellen $z_1, z_2 = \frac{1}{2}\left(H+1 \pm \sqrt{(H+1)(H-3)}\right)$

$\hookrightarrow V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ z_2 - 1 \end{pmatrix} \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ z_1 - 1 \end{pmatrix}$

Linearkombination für $\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{Hz_1 - H - 1}{z_1 - z_2}}_{v_1} \begin{pmatrix} 1 \\ z_2 - 1 \end{pmatrix} + \underbrace{\frac{Hz_2 - H - 1}{z_2 - z_1}}_{v_2} \begin{pmatrix} 1 \\ z_1 - 1 \end{pmatrix}$$

und $\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 z_1^i + v_2 z_2^i \\ v_1 (z_2 - 1) z_1^i + v_2 (z_1 - 1) z_2^i \end{pmatrix}$

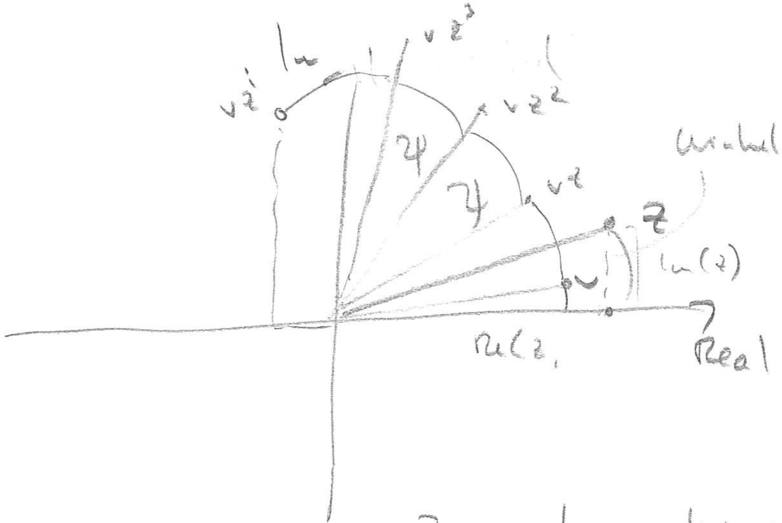
$\hookrightarrow$ L. 7.13

Alg Geo 13.6

Angenommen $C < g \Rightarrow H < 3 \Rightarrow z_1, z_2$ sind konjugierte komplexe Zahlen.

$$a_n = v_1 z_1^n + v_2 z_2^n = 2 \cdot \mathrm{Re}(v_1 \cdot z_1^n)$$

Realteil



Winkel ψ

Komplexe als Ortsvektoren

$\rightsquigarrow$ Multiplikation $\triangleq$ Addieren der Winkel
+ Multiplizieren der Längen.

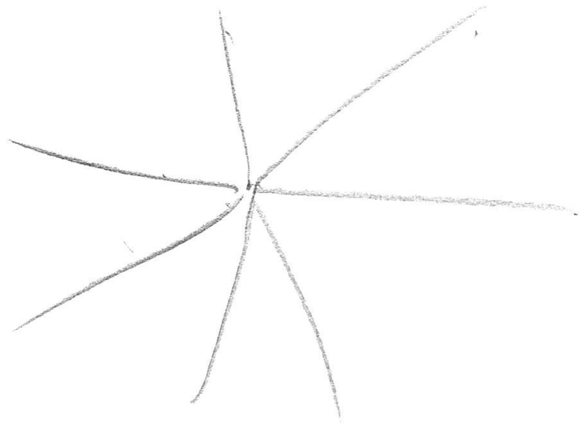
z - komplex $\Rightarrow \psi_z > 0 \Rightarrow v z^i$ irgendwann in der linken Halbebene.

$\Rightarrow$ sodass $2 \cdot \mathrm{Re}(v z^i) = a_i \leq 0$ ↯ $\square$

Für $A > 0$ $\rightsquigarrow$ equivalenter Ansatz mit komplizierteren Formel

AlgGeo 15.7
Erweiterung des Verdopplungskonzeptes

~~m~~ m - Halbgeraden



suchen ein Punkt auf einem davon.

-> nach jeder Runde verdoppeln? -> linear in (m)

-> bei jeder Halbgerade verdoppeln? -> exp(m)

↳ optimal $m=2$ $f_j = 2^j = \left(\frac{2}{1}\right)^j = \left(\frac{m}{m-1}\right)^j$

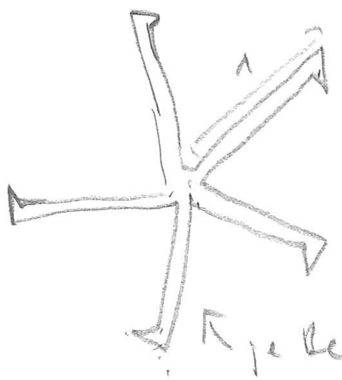
$m=5$ $f_j = \frac{5}{4}^j$

$\Rightarrow 2 \cdot \frac{m^m}{(m-1)^{m-1}} + 1 = 2 \cdot e \cdot m + 1$ -kompetitiv

eulersche Zahl und optimal.

↳ Übertragen auf Polygone mit Sicht

Polygon mit n Ecken, suchen höchstens $\frac{n}{2}-1$ -kompetitiv.



jedes Bein 4 Ecken

<- worst ~~case~~ case ist der Punkt im „letzten" Bein.

kosten $\left(\frac{n}{4}-1\right) \cdot 2 + 1 = \frac{n}{2} - 1$

Tatsächliche Strategie für beliebige (einfache) Polygone mit 8n-Faktor.

Tiefensuche im Shortest Path-Tree mit Verdopplung.