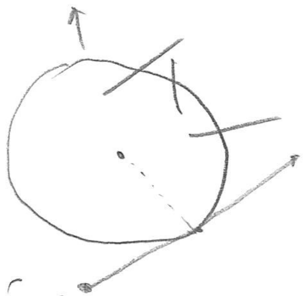
AlgGeo S.1

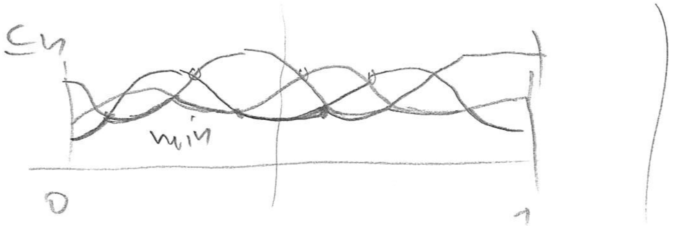
Sweepen mit Gerade

andere Formen gehen auch, z.B. Kreis



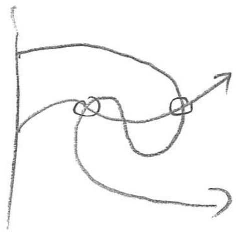
2.3.3 Untere Kontur (lower envelope) ≙ Minimum von Funktionen

Gegeben: $f_i : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig, $1 \le i \le n$



Gesucht: $f(x) := \min\limits_{1 \le i \le n} f_i(x)$

Idee: Sweep



hier Sweep nicht möglich, da "nächster gemeinsamer Schnittpunkt" i.a. nicht definiert

bei uns: Funktionsgraphen der f_i sind x-monoton, d.h. jede vertikale Gerade schneidet ein f_i höchstens 1x

Sweep effizient? i.a. nicht, denn viele Schnittpunkte werden u.U. vergeblich berechnet.

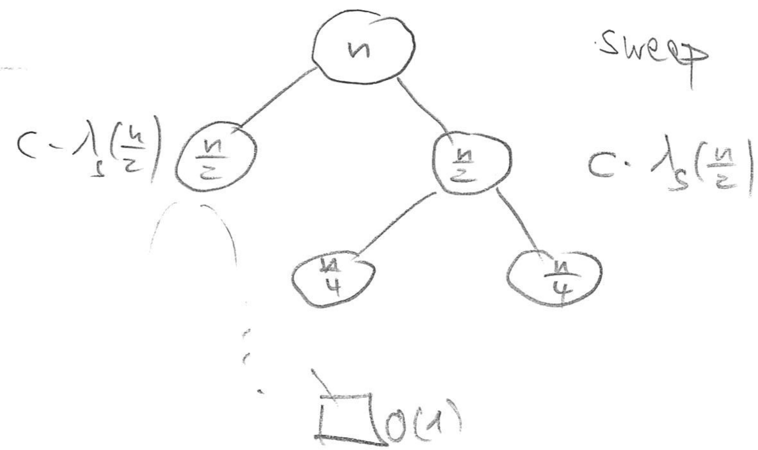
Deshalb: Divide & Conquer + Sweep

AlgGeo 5.2

<u>Jetzt:</u> Gesamtkosten des Divide & Conquer-Algorithmus

<u>Lemma 2.12</u> $\forall s,n \geq 1: \; 2\lambda_s(n) \leq \lambda_s(2n)$ (Beweis: gleich)

<u>Rekursionsbaum</u>



$c \cdot \lambda_s(n)$

insgesamt: $\leq c \cdot \lambda_s(n)$

$\|$

<u>Theorem 2.13</u> Untere Kontur von n X-monotonen Wegen über Intervall:
hat Komplexität $\leq \lambda_s(n)$ (nach Def.)
und läßt sich in Zeit $O(\lambda_s(n) \cdot \log n)$ und $O(n)$ Platz berechnen. $\square$

Was "ist" $\lambda_s(n)$? (→ Sharir, Agarwal '91: DSS and their geometric applications) (A, B, C, ..)

<u>Def:</u> Eine Davenport-Schinzel-Sequenz der Ordnung s über n Buchstaben:
Wort endlicher Länge über A, B, C, .. mit

wie ... AA ... (ABBA)

für je 2 Buchstaben maximal s Wechsel

ABAKADRABA

4 Wechsel

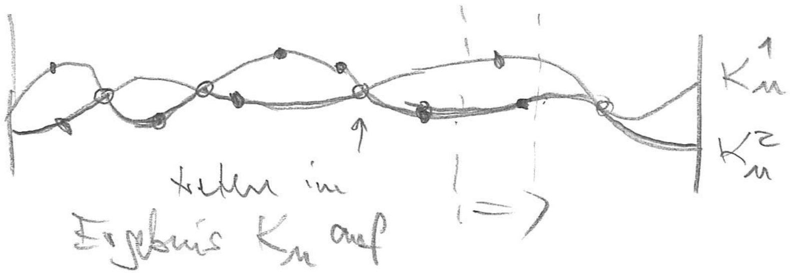
DSS über 5 Buchstaben der Ordnung 4

AlgGeo S. 3

- Teile die Funktionen in zwei gleichgroße Teilmengen K^1, K^2 auf
- berechne rekursiv die unteren Konturen K_u^1 und K_u^2

→ - berechne mit Sweep die untere Kontur K_u von K_u^1 und K_u^2

Aufwand?



Event?

Knoten von K_u^1 $\leq \lambda_s(\frac{n}{2})$

Knoten von K_u^2 $\leq \lambda_s(\frac{n}{2})$

Schnittpunkte von K_u^1, K_u^2 $\leq \lambda_s(n)$

$\leq C \cdot \lambda_s(n)$

C Konstante

Kosten pro Event: $\left.\begin{array}{l}\text{Beschreibung des aktuellen } f_i \text{ wechseln} \\ \text{oben/unten vertauschen} \\ \text{Schnittpunkte berechnen}\end{array}\right\} O(1)$

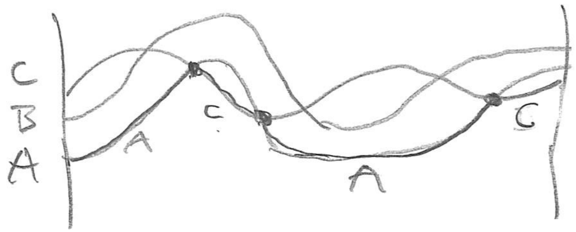
Anzahl der Events?

Def.: Sei $\lambda_s(n) :=$ maximale Anzahl von Kanten der unteren Kontur von n X-monotonen Wegen, von denen sich je zwei höchstens s mal schneiden

AlgGeo S.4

Theorem 2.14 Die maximale Länge einer DSS der Ordnung s über n Buchstaben beträgt $\lambda_s(n)$.

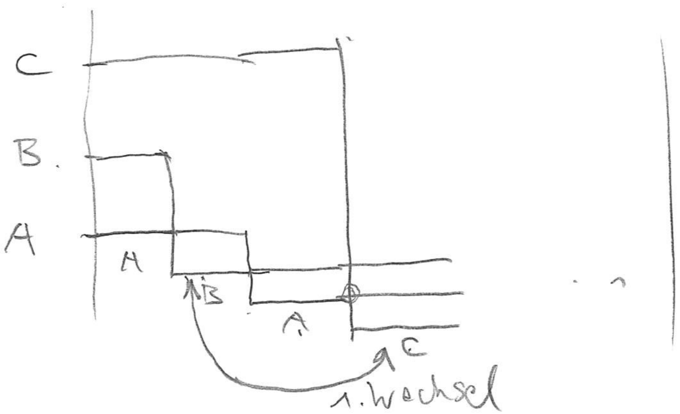
Bew: Zu jeder unteren Kontur gibt es eine gleich lange DSS



wie AA
jeder Wechsel von zwei Buchstaben in der unteren Kontur erfordert einen Schnittpunkt der beiden Wege

Zu jeder DSS der Ordnung s über n Buchstaben gibt es eine untere Kontur von n x-monotonen Wegen über einem Intervall, von denen je zwei sich höchstens s mal schneiden.

Konstruktion: ABACACBC $\quad n=3, \; s=3$



Klar: Wege sind x-monoton über Intervall
DSS $\hat{=}$ untere Kontur
$\leq s$ Schnittpunkte pro Paar
z.B. B und C: anfangs B unterhalb von C
1. Schnittpunkt: C steigt hinunter, um in Kontur zu erscheinen

AlgGeo 5.5

Jetzt: Beweis von Lemma 2.12 $\Rightarrow$ $2\lambda_s(n) \leq \lambda_s(2n)$

Bei Verwendung von DSS trivial

$\underbrace{A\,B\,A\,C\,A\,C\,B\,C}_{S}$ $\underbrace{U\,V\,U\,W\,U\,W\,V\,W}_{\text{neu}}$: Länge verdoppelt sich, Ordnung bleibt erhalten

keine Abhängigkeit

$\square$

$\lambda_s(n) = ?$

Ü 2.12 : (i) $\lambda_1(n) = n$ (ii) $\lambda_2(n) = 2n-1$

Bew (ii): Induktion über n: $n=1$: $\lambda_2(1) = 1 = 2\cdot 1 - 1$ ✓

Sei $n>1$. Betrachte DSS S der Ordnung 2 mit n Buchstaben. Sei z derjenige Buchstabe, dessen erstes Vorkommen in S am weitesten rechts liegt.

Beh: z kommt nur einmal in S vor

Bew: indirekt:

$u \ldots z \; u \; z$ ⇒ 3 Wechsel ↯ $s=2$

erstmals

nochmal

es muß Buchstaben dazwischen geben; sei u der erste

nach Wahl von z: dies kann nicht das erste Vorkommen von u sein

Also: z kommt nur 1x vor!

AlgGeo S. 6

streiche Z in S : $\quad \ldots A \cancel{Z} \cancel{A} A \ldots$

und eventuell einen Nachbarn von Z

$\longrightarrow$ es entsteht DSS $\underbrace{\ }_{S'}$ der Ordnung 2 mit $n-1$ Buchstaben, die um max 2 Stellen kürzer ist als S

$\Rightarrow$ Ind.Vor. Länge von $S' \le 2(n-1)-1 = 2n-3$

$\Rightarrow$ Länge von $S \le 2n-1$. $\square$

<u>Theorem</u> ($\to$ Sharir/Agarwal) $\forall s$: $\lambda_s(n) \in O(n \log^*(n))$ (ohne Beweis)

wobei $\log^*(n)$ = kleinste m mit $\underbrace{\log(\log(\log(\ldots(n)\ldots)))}_{m} \le 1$

mit $\left.2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}\right\}m \ge n$

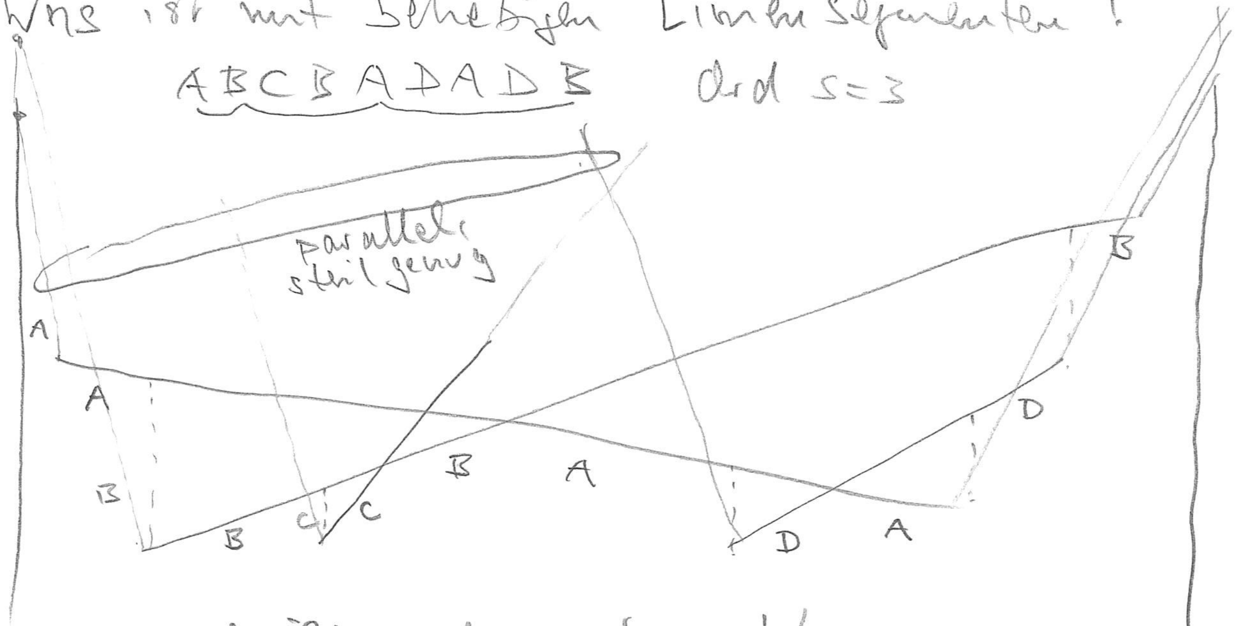
$\log^*(n)$ ist "fast konstant" : $\log^*(n) \le 5$ für $n \le 10^{20.000}$

Alg Geo 5.7

Kor 2.15 Untere Kontur von n Liniensegmenten über Intervall:
In Zeit $O(n \log n)$, $O(n)$ Platz.

Bew: Nach Thm 2.13: $O(\underbrace{\lambda_s(n)}_{\lambda_1(n) = n} \cdot \log n)$ mit $s=1$ Schnitt pro Paar von Liniensegmenten

Frage: Was ist mit beliebigen Liniensegmenten?
$\underline{A\,B\,C\,B\,A\,D\,A\,D\,B}$ Ord $s=3$



Beschriftung der unteren Kontur bleibt erhalten, falls Verlängerungen steil genug
Wir bekommen Funktionen über einem Intervall
maximal 3 Schnitte pro Paar : Ord $=3$

Alg Geo S. 8

<u>Korollar 2.16</u> Untere Kontur von n beliebigen Liniensegmente hat Komplexität $O(\lambda_3(n))$

Shavir/Agarwal: Man n Liniensegmente so platzieren, daß ihre Kontur die Komplexität $n\,\alpha(n)$ besitzt.

<u>Theorem:</u> $\lambda_3(n) \in \Theta(n\,\alpha(n))$

Ackermann-Funktion:

$$A(1,n) = 2n \quad \forall n \geq 1$$
$$A(k,1) = A(k-1,1) \quad \forall k \geq 0$$
$$A(k,n) = A(k-1, A(k,n-1)) \quad \forall k,n \geq 2$$

$A(2,n) = 2^n$, $\quad A(3,n) = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}} \}\, n$ mal

A wächst schneller als alle primitiv rekursiven Funktionen

$\Longrightarrow$ Rekursionstheorie $\quad \mathcal{P} \subsetneq \mathcal{F}_n$

$$\alpha(m) := \min \{ n \,;\, A(n,n) \geq m \}$$ (nahezu konstant)