

# Offline Bewegungsplanung: Bahnplanung Kantengraph

Elmar Langetepe  
University of Bonn

# Freie Orient. $T$ Alg. 2.11

## Freie Orient. $T$ Alg. 2.11

Bearbeite nach **steigendem Winkel** alle krit. Orient.  $\theta_i \in T^*$ :

## Freie Orient. $T$ Alg. 2.11

Bearbeite nach **steigendem Winkel** alle krit. Orient.  $\theta_i \in T^*$ :

- Teste, ob bei  $\theta_i$  evtl. neue Komponente entsteht.

## Freie Orient. $T$ Alg. 2.11

Bearbeite nach **steigendem Winkel** alle krit. Orient.  $\theta_i \in T^*$ :

- Teste, ob bei  $\theta_i$  evtl. neue Komponente entsteht.
- Falls ja:

## Freie Orient. $T$ Alg. 2.11

Bearbeite nach **steigendem Winkel** alle krit. Orient.  $\theta_i \in T^*$ :

- Teste, ob bei  $\theta_i$  evtl. neue Komponente entsteht.
- Falls ja:
  - Falls  $\theta_i \notin T''$ : ignoriere  $\theta_i$ .

## Freie Orient. $T$ Alg. 2.11

Bearbeite nach **steigendem Winkel** alle krit. Orient.  $\theta_i \in T^*$ :

- Teste, ob bei  $\theta_i$  evtl. neue Komponente entsteht.
- Falls ja:
  - Falls  $\theta_i \notin T''$ : ignoriere  $\theta_i$ .
  - Ansonsten aktualisiere die Listen  $L_O(\theta_i)$ .

## Freie Orient. $T$ Alg. 2.11

Bearbeite nach **steigendem Winkel** alle krit. Orient.  $\theta_i \in T^*$ :

- Teste, ob bei  $\theta_i$  evtl. neue Komponente entsteht.
- Falls ja:
  - Falls  $\theta_i \notin T''$ : ignoriere  $\theta_i$ .
  - Ansonsten aktualisiere die Listen  $L_O(\theta_i)$ .
- Falls nein:



## Freie Orient. $T$ Alg. 2.11

Bearbeite nach **steigendem Winkel** alle krit. Orient.  $\theta_i \in T^*$ :

- Teste, ob bei  $\theta_i$  evtl. neue Komponente entsteht.
- Falls ja:
  - Falls  $\theta_i \notin T''$ : ignoriere  $\theta_i$ .
  - Ansonsten aktualisiere die Listen  $L_O(\theta_i)$ .
- Falls nein:
  - $O, O', O''$  die zugeh. Kontaktpaare.

## Freie Orient. $T$ Alg. 2.11

Bearbeite nach **steigendem Winkel** alle krit. Orient.  $\theta_i \in T^*$ :

- Teste, ob bei  $\theta_i$  evtl. neue Komponente entsteht.
- Falls ja:
  - Falls  $\theta_i \notin T''$ : ignoriere  $\theta_i$ .
  - Ansonsten aktualisiere die Listen  $L_O(\theta_i)$ .
- Falls nein:
  - $O, O', O''$  die zugeh. Kontaktpaare. Suche nach  $O$  oder  $O'$  in  $L_{O''}(\theta_i)$ , nach  $O$  oder  $O''$  in  $L_{O'}(\theta_i)$ , nach  $O'$  oder  $O''$  in  $L_O(\theta_i)$ .

## Freie Orient. $T$ Alg. 2.11

Bearbeite nach **steigendem Winkel** alle krit. Orient.  $\theta_i \in T^*$ :

- Teste, ob bei  $\theta_i$  evtl. neue Komponente entsteht.
- Falls ja:
  - Falls  $\theta_i \notin T''$ : ignoriere  $\theta_i$ .
  - Ansonsten aktualisiere die Listen  $L_O(\theta_i)$ .
- Falls nein:
  - $O, O', O''$  die zugeh. Kontaktpaare. Suche nach  $O$  oder  $O'$  in  $L_{O''}(\theta_i)$ , nach  $O$  oder  $O''$  in  $L_{O'}(\theta_i)$ , nach  $O'$  oder  $O''$  in  $L_O(\theta_i)$ .
  - Falls z.B.  $O'$  in  $L_O(\theta_i)$  (oder  $O$  in  $L_{O'}(\theta_i)$ ) ( $\theta_i$  ist frei):

## Freie Orient. $T$ Alg. 2.11

Bearbeite nach **steigendem Winkel** alle krit. Orient.  $\theta_i \in T^*$ :

- Teste, ob bei  $\theta_i$  evtl. neue Komponente entsteht.
- Falls ja:
  - Falls  $\theta_i \notin T''$ : ignoriere  $\theta_i$ .
  - Ansonsten aktualisiere die Listen  $L_O(\theta_i)$ .
- Falls nein:
  - $O, O', O''$  die zugeh. Kontaktpaare. Suche nach  $O$  oder  $O'$  in  $L_{O''}(\theta_i)$ , nach  $O$  oder  $O''$  in  $L_{O'}(\theta_i)$ , nach  $O'$  oder  $O''$  in  $L_O(\theta_i)$ .
  - Falls z.B.  $O'$  in  $L_O(\theta_i)$  (oder  $O$  in  $L_{O'}(\theta_i)$ ) ( $\theta_i$  ist frei): ber. lok. Änderungen in  $C_{\text{frei}}^\theta$ ,

## Freie Orient. $T$ Alg. 2.11

Bearbeite nach **steigendem Winkel** alle krit. Orient.  $\theta_i \in T^*$ :

- Teste, ob bei  $\theta_i$  evtl. neue Komponente entsteht.
- Falls ja:
  - Falls  $\theta_i \notin T''$ : ignoriere  $\theta_i$ .
  - Ansonsten aktualisiere die Listen  $L_O(\theta_i)$ .
- Falls nein:
  - $O, O', O''$  die zugeh. Kontaktpaare. Suche nach  $O$  oder  $O'$  in  $L_{O''}(\theta_i)$ , nach  $O$  oder  $O''$  in  $L_{O'}(\theta_i)$ , nach  $O'$  oder  $O''$  in  $L_O(\theta_i)$ .
  - Falls z.B.  $O'$  in  $L_O(\theta_i)$  (oder  $O$  in  $L_{O'}(\theta_i)$ ) ( $\theta_i$  ist frei): ber. lok. Änderungen in  $C_{\text{frei}}^\theta$ , akt. Listen  $L_O(\theta_i), L_{O'}(\theta_i), L_{O''}(\theta_i)$ .

- Falls Suche erfolglos (z.B. nur zwei Kontaktpaare),

- Falls Suche erfolglos (z.B. nur zwei Kontaktpaare), teste  $\theta_i \in T'$ .

- Falls Suche erfolglos (z.B. nur zwei Kontaktpaare), teste  $\theta_i \in T'$ . Falls ja:



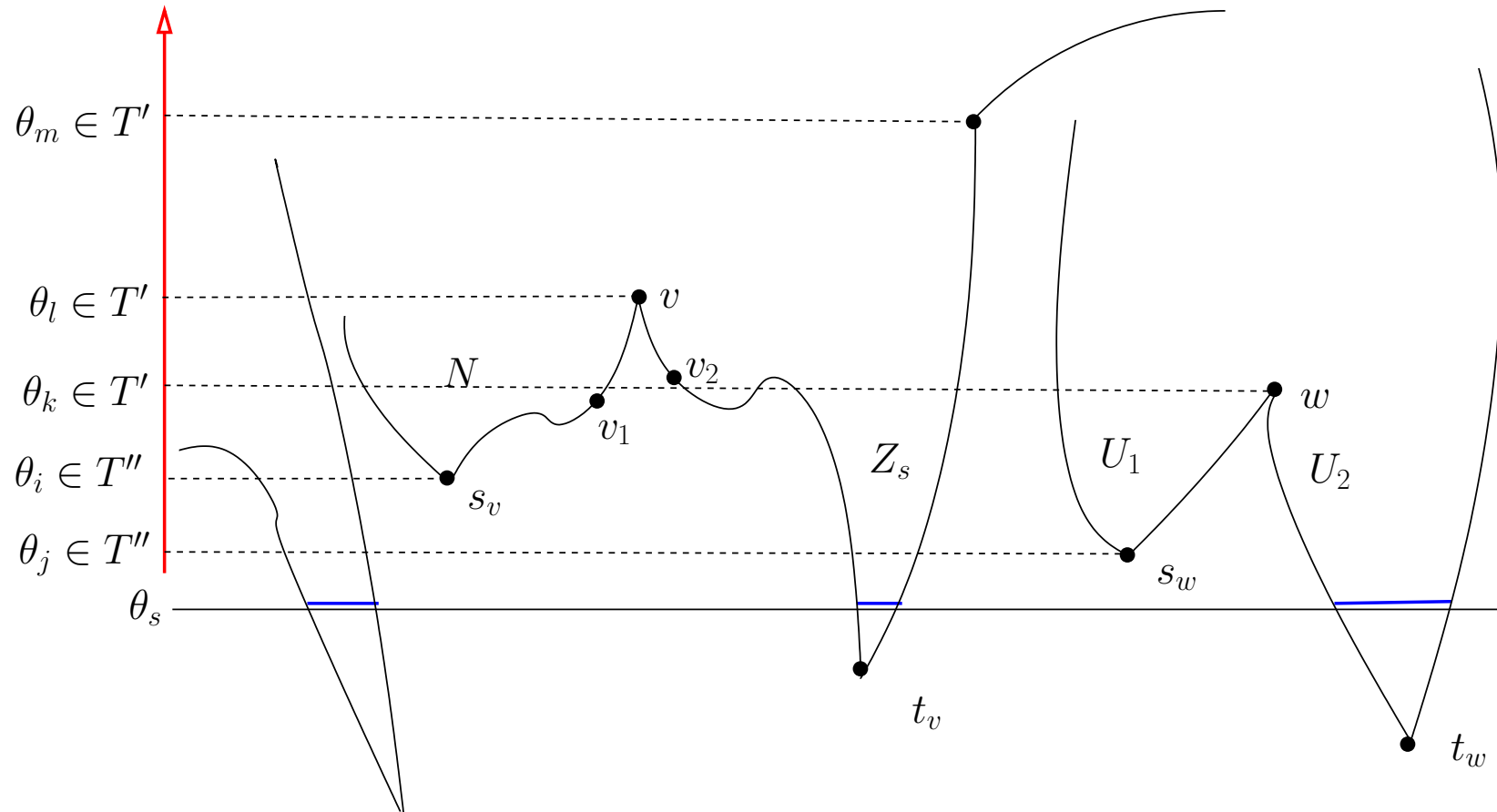
- Falls Suche erfolglos (z.B. nur zwei Kontaktpaare), teste  $\theta_i \in T'$ . Falls ja: Es entsteht konvexe Ecke von  $C_{\text{verb}}^\theta$ , aber keine neue Komponente,  $\theta_i$  ist gültig.

- Falls Suche erfolglos (z.B. nur zwei Kontaktpaare), teste  $\theta_i \in T'$ . Falls ja: Es entsteht konvexe Ecke von  $C_{\text{verb}}^\theta$ , aber keine neue Komponente,  $\theta_i$  ist gültig. Falls nein:

- Falls Suche erfolglos (z.B. nur zwei Kontaktpaare), teste  $\theta_i \in T'$ . Falls ja: Es entsteht konvexe Ecke von  $C_{\text{verb}}^\theta$ , aber keine neue Komponente,  $\theta_i$  ist gültig. Falls nein: ignoriere  $\theta_i$ .

- Falls Suche erfolglos (z.B. nur zwei Kontaktpaare), teste  $\theta_i \in T'$ . Falls ja: Es entsteht konvexe Ecke von  $C_{\text{verb}}^\theta$ , aber keine neue Komponente,  $\theta_i$  ist gültig. Falls nein: ignoriere  $\theta_i$ .
- $T$  besteht aus allen nicht ignorierten Orientierungen aus  $T^*$ .

# Veranschaulichung!!



## Insgesamt!!

Kritische Orientierungen $T^*$	$O(mn \lambda_6(mn) \log(mn))$
Orientierungen $T'$ (konv. Eck. von $C_{\text{verb}}^\theta$ )	$O(m^2 n^2 \log(mn))$
Orientierungen $T''$ (wicht. Komp.)	$O(mn \lambda_6(mn) \log(mn))$
$T$ aus $T^*, T'$ und $T''$	$O(mn \lambda_6(mn) \log(mn))$

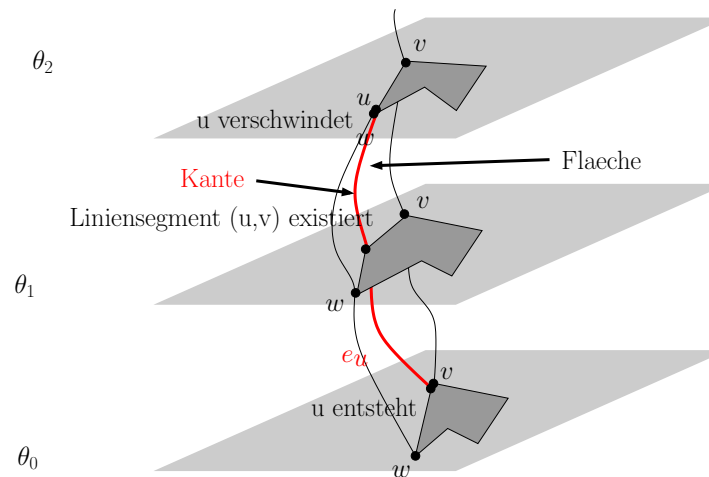
$T$  enthält alles was wir brauchen!

Damit läßt sich sukzessive  $V^\theta$  bestimmen, sukzessive der Kantengraph aufbauen

Zeit  $O(mn \lambda_6(mn) \log(mn))$

# Aufbau des Kantengraphen: Alg. 2.12

- erweiterte Knoten  $(u, L(u))$ : Kante in  $C_{frei}$
- erweiterter Knoten  $(v, L(v))$ : Kante in  $C_{frei}$
- erw. Kante  $e = ((u, L(u)), (v, L(v)))$  mit  $L(e)$ : Fläche in  $C_{frei}$



# Aufbau des Kantengraphen: Alg. 2.12



## Aufbau des Kantengraphen: Alg. 2.12

- Berechne Menge  $T$  aller kritischen Orientierungen, sortiert nach aufsteigendem  $\theta$ !

## Aufbau des Kantengraphen: Alg. 2.12

- Berechne Menge  $T$  aller kritischen Orientierungen, sortiert nach aufsteigendem  $\theta$ ! Zeit:  $O(nm\lambda_6(mn) \log mn)$ ,

## Aufbau des Kantengraphen: Alg. 2.12

- Berechne Menge  $T$  aller kritischen Orientierungen, sortiert nach aufsteigendem  $\theta$ ! Zeit:  $O(nm\lambda_6(mn) \log mn)$ ,  
 $|T| = O(nm\lambda_6(mn))$

## Aufbau des Kantengraphen: Alg. 2.12

- Berechne Menge  $T$  aller kritischen Orientierungen, sortiert nach aufsteigendem  $\theta$ ! Zeit:  $O(nm\lambda_6(mn) \log mn)$ ,  
 $|T| = O(nm\lambda_6(mn))$
- Wähle  $\theta_0 \notin T$  und berechne  $V^{\theta_0}$ .

## Aufbau des Kantengraphen: Alg. 2.12

- Berechne Menge  $T$  aller kritischen Orientierungen, sortiert nach aufsteigendem  $\theta$ ! Zeit:  $O(nm\lambda_6(mn) \log mn)$ ,  
 $|T| = O(nm\lambda_6(mn))$
- Wähle  $\theta_0 \notin T$  und berechne  $V^{\theta_0}$ .
- Initialisiere  $E$  mit den Kanten und Knoten aus  $V^{\theta_0}$ , dabei bleiben die Lebensdauerintervalle  $L(u)$  zunächst undefiniert.

## Aufbau des Kantengraphen: Alg. 2.12

- Berechne Menge  $T$  aller kritischen Orientierungen, sortiert nach aufsteigendem  $\theta$ ! Zeit:  $O(nm\lambda_6(mn) \log mn)$ ,  
 $|T| = O(nm\lambda_6(mn))$
- Wähle  $\theta_0 \notin T$  und berechne  $V^{\theta_0}$ .
- Initialisiere  $E$  mit den Kanten und Knoten aus  $V^{\theta_0}$ , dabei bleiben die Lebensdauerintervalle  $L(u)$  zunächst undefiniert. (Wir sind mitten in einem Intervall!!)

# Aufbau des Kantengraphen: Alg. 2.12

# Aufbau des Kantengraphen: Alg. 2.12

- Sukzessive:



## Aufbau des Kantengraphen: Alg. 2.12

- Sukzessive: Für Orientierung  $\theta_i$  in  $T$ :

## Aufbau des Kantengraphen: Alg. 2.12

- Sukzessive: Für Orientierung  $\theta_i$  in  $T$ :
  - Bestimme die Änderungen in  $V^\theta$ : Übergang von  $\theta = \theta_i - \varepsilon$  nach  $\theta = \theta_i + \varepsilon$

## Aufbau des Kantengraphen: Alg. 2.12

- Sukzessive: Für Orientierung  $\theta_i$  in  $T$ :
  - Bestimme die Änderungen in  $V^\theta$ : Übergang von  $\theta = \theta_i - \varepsilon$  nach  $\theta = \theta_i + \varepsilon$
  - Entferne alle verschwindenden Knoten und Kanten  $v_1, \dots, v_r, e_1, \dots, e_s$  aus  $V^\theta$ ,

## Aufbau des Kantengraphen: Alg. 2.12

- Sukzessive: Für Orientierung  $\theta_i$  in  $T$ :
  - Bestimme die Änderungen in  $V^\theta$ : Übergang von  $\theta = \theta_i - \varepsilon$  nach  $\theta = \theta_i + \varepsilon$
  - Entferne alle verschwindenden Knoten und Kanten  $v_1, \dots, v_r, e_1, \dots, e_s$  aus  $V^\theta$ , setze  $\theta_i$  als obere Grenze der Lebensdauer von  $L(v_j)$  bzw.  $L(e_k)$  ein

## Aufbau des Kantengraphen: Alg. 2.12

- Sukzessive: Für Orientierung  $\theta_i$  in  $T$ :
  - Bestimme die Änderungen in  $V^\theta$ : Übergang von  $\theta = \theta_i - \varepsilon$  nach  $\theta = \theta_i + \varepsilon$
  - Entferne alle verschwindenden Knoten und Kanten  $v_1, \dots, v_r, e_1, \dots, e_s$  aus  $V^\theta$ , setze  $\theta_i$  als obere Grenze der Lebensdauer von  $L(v_j)$  bzw.  $L(e_k)$  ein
  - Füge alle neu entstandenen Knoten und Kanten  $v_1^*, \dots, v_{r^*}^*, e_1^*, \dots, e_{s^*}^*$  in  $V^\theta$  und  $E$  ein,

## Aufbau des Kantengraphen: Alg. 2.12

- Sukzessive: Für Orientierung  $\theta_i$  in  $T$ :
  - Bestimme die Änderungen in  $V^\theta$ : Übergang von  $\theta = \theta_i - \varepsilon$  nach  $\theta = \theta_i + \varepsilon$
  - Entferne alle verschwindenden Knoten und Kanten  $v_1, \dots, v_r, e_1, \dots, e_s$  aus  $V^\theta$ , setze  $\theta_i$  als obere Grenze der Lebensdauer von  $L(v_j)$  bzw.  $L(e_k)$  ein
  - Füge alle neu entstandenen Knoten und Kanten  $v_1^*, \dots, v_r^*, e_1^*, \dots, e_s^*$  in  $V^\theta$  und  $E$  ein, setze  $\theta_i$  als untere Grenze der Lebensdauer von  $L(v_j^*)$  bzw.  $L(e_k^*)$  ein

## Aufbau des Kantengraphen: Alg. 2.12

- Sukzessive: Für Orientierung  $\theta_i$  in  $T$ :
  - Bestimme die Änderungen in  $V^\theta$ : Übergang von  $\theta = \theta_i - \varepsilon$  nach  $\theta = \theta_i + \varepsilon$
  - Entferne alle verschwindenden Knoten und Kanten  $v_1, \dots, v_r, e_1, \dots, e_s$  aus  $V^\theta$ , setze  $\theta_i$  als obere Grenze der Lebensdauer von  $L(v_j)$  bzw.  $L(e_k)$  ein
  - Füge alle neu entstandenen Knoten und Kanten  $v_1^*, \dots, v_r^*, e_1^*, \dots, e_s^*$  in  $V^\theta$  und  $E$  ein, setze  $\theta_i$  als untere Grenze der Lebensdauer von  $L(v_j^*)$  bzw.  $L(e_k^*)$  ein
- Nach  $2\pi$  Durchlauf bei  $\theta_0$ :

## Aufbau des Kantengraphen: Alg. 2.12

- Sukzessive: Für Orientierung  $\theta_i$  in  $T$ :
  - Bestimme die Änderungen in  $V^\theta$ : Übergang von  $\theta = \theta_i - \varepsilon$  nach  $\theta = \theta_i + \varepsilon$
  - Entferne alle verschwindenden Knoten und Kanten  $v_1, \dots, v_r, e_1, \dots, e_s$  aus  $V^\theta$ , setze  $\theta_i$  als obere Grenze der Lebensdauer von  $L(v_j)$  bzw.  $L(e_k)$  ein
  - Füge alle neu entstandenen Knoten und Kanten  $v_1^*, \dots, v_r^*, e_1^*, \dots, e_s^*$  in  $V^\theta$  und  $E$  ein, setze  $\theta_i$  als untere Grenze der Lebensdauer von  $L(v_j^*)$  bzw.  $L(e_k^*)$  ein
- Nach  $2\pi$  Durchlauf bei  $\theta_0$ : Trage noch fehlenden Lebensdauern nach,



## Aufbau des Kantengraphen: Alg. 2.12

- Sukzessive: Für Orientierung  $\theta_i$  in  $T$ :
  - Bestimme die Änderungen in  $V^\theta$ : Übergang von  $\theta = \theta_i - \varepsilon$  nach  $\theta = \theta_i + \varepsilon$
  - Entferne alle verschwindenden Knoten und Kanten  $v_1, \dots, v_r, e_1, \dots, e_s$  aus  $V^\theta$ , setze  $\theta_i$  als obere Grenze der Lebensdauer von  $L(v_j)$  bzw.  $L(e_k)$  ein
  - Füge alle neu entstandenen Knoten und Kanten  $v_1^*, \dots, v_r^*, e_1^*, \dots, e_s^*$  in  $V^\theta$  und  $E$  ein, setze  $\theta_i$  als untere Grenze der Lebensdauer von  $L(v_j^*)$  bzw.  $L(e_k^*)$  ein
- Nach  $2\pi$  Durchlauf bei  $\theta_0$ : Trage noch fehlenden Lebensdauern nach, genauer: fasse zwei Knoten der Art  $(u, (\theta_1, \text{undef.}))$  und  $(u, (\text{undef.}, \theta_2))$  zu Knoten  $(u, (\theta_1, \theta_2))$  zusammen

# Aufbau des Kantengraphen: Alg. 2.12

# Aufbau des Kantengraphen: Alg. 2.12

Analyse:

# Aufbau des Kantengraphen: Alg. 2.12

Analyse:

Alle Änderungen in  $O(mn\lambda_6(mn) \log mn)$ ,

# Aufbau des Kantengraphen: Alg. 2.12

Analyse:

Alle Änderungen in  $O(mn\lambda_6(mn) \log mn)$ , bereits gezeigt

## Aufbau des Kantengraphen: Alg. 2.12

Analyse:

Alle Änderungen in  $O(mn\lambda_6(mn) \log mn)$ , bereits gezeigt

Kantengraph hat Komplexität  $O(mn\lambda_6(mn))$

# Aufbau des Kantengraphen: Alg. 2.12

Analyse:

Alle Änderungen in  $O(mn\lambda_6(mn) \log mn)$ , bereits gezeigt

Kantengraph hat Komplexität  $O(mn\lambda_6(mn))$

Anfangs:  $O(mn)$ ,

## Aufbau des Kantengraphen: Alg. 2.12

Analyse:

Alle Änderungen in  $O(mn\lambda_6(mn) \log mn)$ , bereits gezeigt

Kantengraph hat Komplexität  $O(mn\lambda_6(mn))$

Anfangs:  $O(mn)$ , dann kommen noch  $O(mn\lambda_6(mn))$  Änderungen dazu



## Aufbau des Kantengraphen: Alg. 2.12

Analyse:

Alle Änderungen in  $O(mn\lambda_6(mn) \log mn)$ , bereits gezeigt

Kantengraph hat Komplexität  $O(mn\lambda_6(mn))$

Anfangs:  $O(mn)$ , dann kommen noch  $O(mn\lambda_6(mn))$  Änderungen dazu

Aufbau:  $O(mn\lambda_6(mn) \log mn)$ !

# Bahnplanung mit Kantengraph

# Bahnplanung mit Kantengraph

- Bewegung von Orientierung  $(x_1, y_1, \theta_1)$  zu  $(x_2, y_2, \theta_2)$ ?

# Bahnplanung mit Kantengraph

- Bewegung von Orientierung  $(x_1, y_1, \theta_1)$  zu  $(x_2, y_2, \theta_2)$ ?
- Kantengraph repräsentiert den Rand von  $C_{frei}$

# Bahnplanung mit Kantengraph

- Bewegung von Orientierung  $(x_1, y_1, \theta_1)$  zu  $(x_2, y_2, \theta_2)$ ?
- Kantengraph repräsentiert den Rand von  $C_{frei}$
- Erstmal auf den Rand!!

# Bahnplanung mit Kantengraph

- Bewegung von Orientierung  $(x_1, y_1, \theta_1)$  zu  $(x_2, y_2, \theta_2)$ ?
- Kantengraph repräsentiert den Rand von  $C_{frei}$
- Erstmal auf den Rand!!
- **Def. 2.44** Abbildung auf den Rand

# Bahnplanung mit Kantengraph

- Bewegung von Orientierung  $(x_1, y_1, \theta_1)$  zu  $(x_2, y_2, \theta_2)$ ?
- Kantengraph repräsentiert den Rand von  $C_{frei}$
- Erstmal auf den Rand!!
- **Def. 2.44** Abbildung auf den Rand
- $\Phi : C_{frei} \longrightarrow$  Knoten von E

# Bahnplanung mit Kantengraph

- Bewegung von Orientierung  $(x_1, y_1, \theta_1)$  zu  $(x_2, y_2, \theta_2)$ ?
- Kantengraph repräsentiert den Rand von  $C_{frei}$
- Erstmal auf den Rand!!
- **Def. 2.44** Abbildung auf den Rand
- $\Phi : C_{frei} \longrightarrow$  Knoten von E
- $(x, y, \theta) \longmapsto$  Knoten  $(u, L(u))$



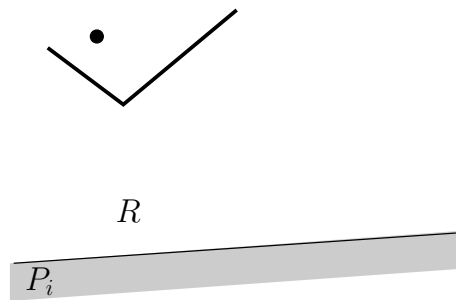
# Bahnplanung mit Kantengraph

- Bewegung von Orientierung  $(x_1, y_1, \theta_1)$  zu  $(x_2, y_2, \theta_2)$ ?
- Kantengraph repräsentiert den Rand von  $C_{frei}$
- Erstmal auf den Rand!!
- **Def. 2.44** Abbildung auf den Rand
- $\Phi : C_{frei} \longrightarrow$  Knoten von E
- $(x, y, \theta) \longmapsto$  Knoten  $(u, L(u))$
- Entspricht Kante  $e_u$  von  $C_{frei}$  auf dem Rand der Zusammenhangskomponente  $Z$  von  $C_{frei}$  mit  $(x, y, \theta) \in Z$

# Bahnplanung mit Kantengraph

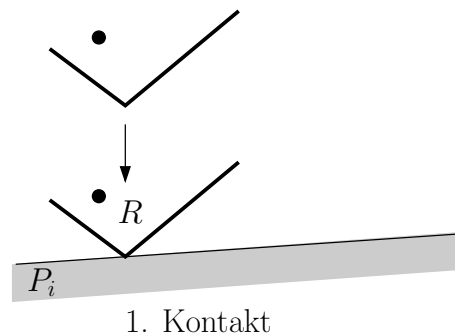
- Bewegung von Orientierung  $(x_1, y_1, \theta_1)$  zu  $(x_2, y_2, \theta_2)$ ?
- Kantengraph repräsentiert den Rand von  $C_{frei}$
- Erstmal auf den Rand!!
- **Def. 2.44** Abbildung auf den Rand
- $\Phi : C_{frei} \longrightarrow$  Knoten von E
- $(x, y, \theta) \longmapsto$  Knoten  $(u, L(u))$
- Entspricht Kante  $e_u$  von  $C_{frei}$  auf dem Rand der Zusammenhangskomponente  $Z$  von  $C_{frei}$  mit  $(x, y, \theta) \in Z$
- Konstruktiv!!

## Def. 2.44 Abbildung



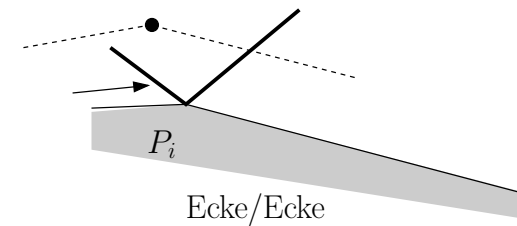
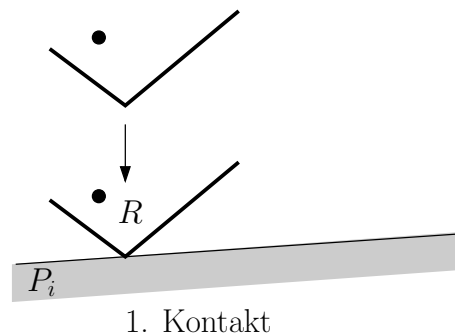
## Def. 2.44 Abbildung

- Bewegung von  $R$  nach unten: Kontakt I



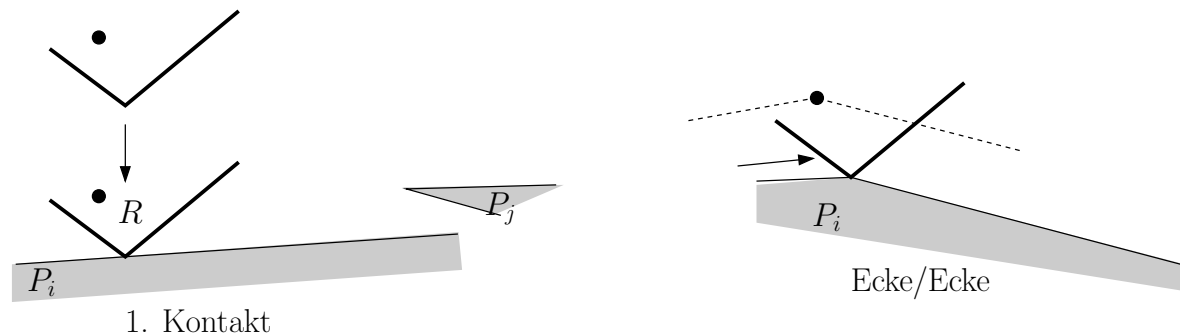
## Def. 2.44 Abbildung

- Bewegung von  $R$  nach unten: Kontakt I
- Bereits Ecke/Ecke oder Mehrfach-Kontakt: Fertig



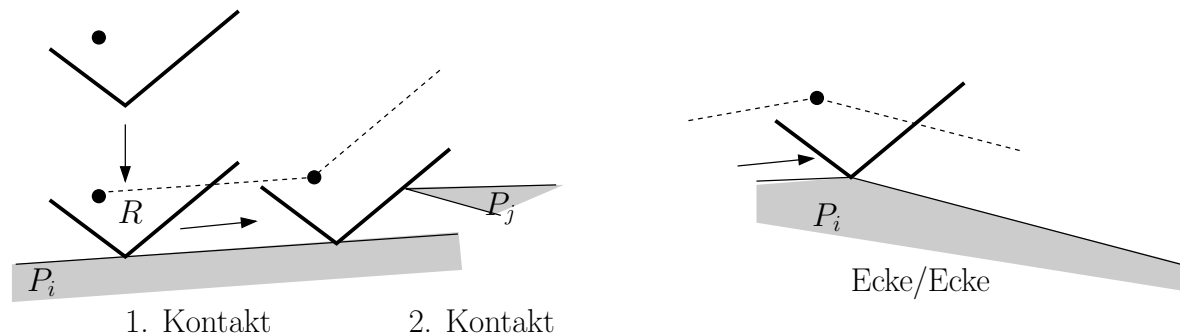
## Def. 2.44 Abbildung

- Bewegung von  $R$  nach unten: Kontakt I
- Bereits Ecke/Ecke oder Mehrfach-Kontakt: Fertig
- Sonst Bewegung nach rechts, bis Knoten in  $V^\theta$



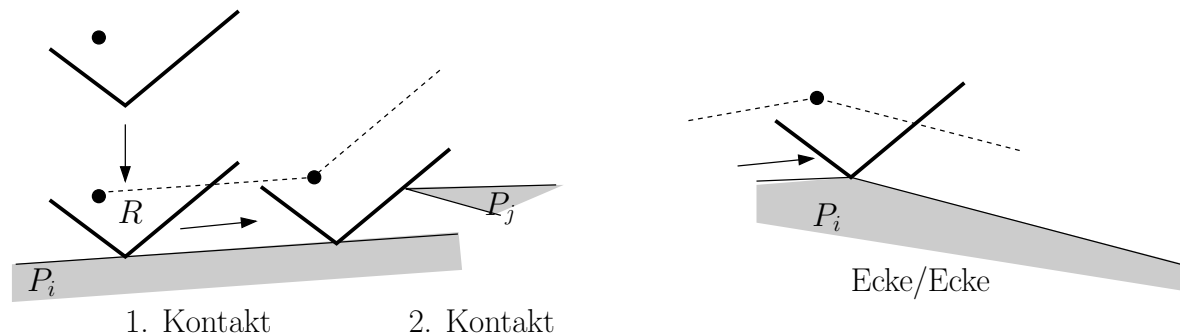
## Def. 2.44 Abbildung

- Bewegung von  $R$  nach unten: Kontakt I
- Bereits Ecke/Ecke oder Mehrfach-Kontakt: Fertig
- Sonst Bewegung nach rechts, bis Knoten in  $V^\theta$



## Def. 2.44 Abbildung

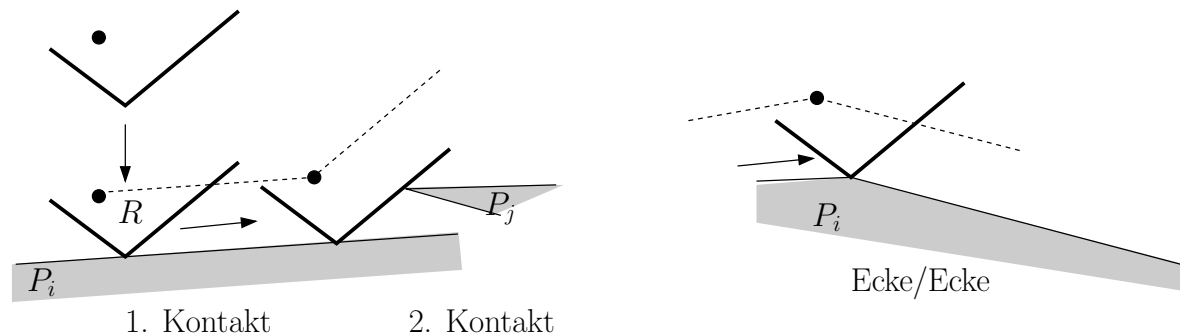
- Bewegung von  $R$  nach unten: Kontakt I
- Bereits Ecke/Ecke oder Mehrfach-Kontakt: Fertig
- Sonst Bewegung nach rechts, bis Knoten in  $V^\theta$
- Erweiterter Knoten  $(u, L(u))$  in  $E$





## Def. 2.44 Abbildung

- Bewegung von  $R$  nach unten: Kontakt I
- Bereits Ecke/Ecke oder Mehrfach-Kontakt: Fertig
- Sonst Bewegung nach rechts, bis Knoten in  $V^\theta$
- Erweiterter Knoten  $(u, L(u))$  in  $E$
- In  $O(nm)$  berechnen



# Bahnplanung mit Kantengraph

# Bahnplanung mit Kantengraph

- Bewegung von Orientierung  $s = (x_s, y_s, \theta_s)$  zu  $t = (x_t, y_t, \theta_t)$ ?

# Bahnplanung mit Kantengraph

- Bewegung von Orientierung  $s = (x_s, y_s, \theta_s)$  zu  $t = (x_t, y_t, \theta_t)$ ?
- Kollisionsfrei?

# Bahnplanung mit Kantengraph

- Bewegung von Orientierung  $s = (x_s, y_s, \theta_s)$  zu  $t = (x_t, y_t, \theta_t)$ ?
- Kollisionsfrei?
- Existiert Weg von  $\Phi(s)$  zu  $\Phi(t)$  in  $E$ ?

# Bahnplanung mit Kantengraph

- Bewegung von Orientierung  $s = (x_s, y_s, \theta_s)$  zu  $t = (x_t, y_t, \theta_t)$ ?
- Kollisionsfrei?
- Existiert Weg von  $\Phi(s)$  zu  $\Phi(t)$  in  $E$ ?
- Korrektheit

# Bahnplanung mit Kantengraph

- Bewegung von Orientierung  $s = (x_s, y_s, \theta_s)$  zu  $t = (x_t, y_t, \theta_t)$ ?
- Kollisionsfrei?
- Existiert Weg von  $\Phi(s)$  zu  $\Phi(t)$  in  $E$ ?
- Korrektheit

Theorem 2.45:

# Bahnplanung mit Kantengraph

- Bewegung von Orientierung  $s = (x_s, y_s, \theta_s)$  zu  $t = (x_t, y_t, \theta_t)$ ?
- Kollisionsfrei?
- Existiert Weg von  $\Phi(s)$  zu  $\Phi(t)$  in  $E$ ?
- Korrektheit

**Theorem 2.45:**  $s, t$  zwei freie Plazierungen von  $R$ .



# Bahnplanung mit Kantengraph

- Bewegung von Orientierung  $s = (x_s, y_s, \theta_s)$  zu  $t = (x_t, y_t, \theta_t)$ ?
- Kollisionsfrei?
- Existiert Weg von  $\Phi(s)$  zu  $\Phi(t)$  in  $E$ ?
- Korrektheit

**Theorem 2.45:**  $s, t$  zwei freie Plazierungen von  $R$ .

Es gibt eine kollisionsfreie Bewegung von  $s$  nach  $t$  genau dann, wenn  $\Phi(s)$  und  $\Phi(t)$  Knoten derselben Zusammenhangskomponente  $Z$  des Kantengraphen  $E$  sind.

# Beweis: **Theorem 2.45**

# Beweis: Theorem 2.45

Lemma 2.46:

## Beweis: Theorem 2.45

Lemma 2.46:

Zur Zusammenhangskomponente  $W$  von  $C_{\text{frei}}$  gehört eindeutig eine Zusammenhangskomponente  $Z$  von  $E$  mit:

## Beweis: Theorem 2.45

Lemma 2.46:

Zur Zusammenhangskomponente  $W$  von  $C_{\text{frei}}$  gehört eindeutig eine Zusammenhangskomponente  $Z$  von  $E$  mit:

Knoten von  $Z \iff$  Kanten in  $\partial W$ .

## Beweis: Theorem 2.45

Lemma 2.46:

Zur Zusammenhangskomponente  $W$  von  $C_{\text{frei}}$  gehört eindeutig eine Zusammenhangskomponente  $Z$  von  $E$  mit:

Knoten von  $Z \iff$  Kanten in  $\partial W$ .

Zusammenhangskomponenten korrelieren

# Beweis: Theorem 2.45

## Beweis: Theorem 2.45

- Annahme: Lemma 2.46 gilt!



## Beweis: Theorem 2.45

- Annahme: Lemma 2.46 gilt!
- $\Phi(s) = \Phi(x_s, y_s, \theta_s) = (u, L(u))$ ,  $\Phi(t) = \Phi(x_t, y_t, \theta_t) = (v, L(v))$

## Beweis: Theorem 2.45

- Annahme: Lemma 2.46 gilt!
- $\Phi(s) = \Phi(x_s, y_s, \theta_s) = (u, L(u))$ ,  $\Phi(t) = \Phi(x_t, y_t, \theta_t) = (v, L(v))$
- $e_u, e_v$  Kanten von  $C_{\text{frei}}$ , die zu Knoten  $(u, L(u))$  und  $(v, L(v))$  von  $E$  gehören

## Beweis: Theorem 2.45

- Annahme: Lemma 2.46 gilt!
- $\Phi(s) = \Phi(x_s, y_s, \theta_s) = (u, L(u))$ ,  $\Phi(t) = \Phi(x_t, y_t, \theta_t) = (v, L(v))$
- $e_u, e_v$  Kanten von  $C_{\text{frei}}$ , die zu Knoten  $(u, L(u))$  und  $(v, L(v))$  von  $E$  gehören
- kollisionsfreie Translation von  $s = (x_s, y_s, \theta_s)$  nach  $u$  (Knoten  $C_{\text{frei}}^{\theta_s}$ )

## Beweis: Theorem 2.45

- Annahme: Lemma 2.46 gilt!
- $\Phi(s) = \Phi(x_s, y_s, \theta_s) = (u, L(u))$ ,  $\Phi(t) = \Phi(x_t, y_t, \theta_t) = (v, L(v))$
- $e_u, e_v$  Kanten von  $C_{\text{frei}}$ , die zu Knoten  $(u, L(u))$  und  $(v, L(v))$  von  $E$  gehören
- kollisionsfreie Translation von  $s = (x_s, y_s, \theta_s)$  nach  $u$  (Knoten  $C_{\text{frei}}^{\theta_s}$ )
- kollisionsfreie Translationen von  $t = (x_t, y_t, \theta_t)$  nach  $v$  (Knoten  $C_{\text{frei}}^{\theta_t}$ )

# Beweis: **Theorem 2.45**

## Beweis: Theorem 2.45

- $\exists$  kollisionsfreie Bewegung von  $s$  nach  $t$

## Beweis: Theorem 2.45

- $\exists$  kollisionsfreie Bewegung von  $s$  nach  $t$
- $\Leftrightarrow \exists$  kollisionsfreie Bewegung von  $u$  nach  $v$

## Beweis: Theorem 2.45

- $\exists$  kollisionsfreie Bewegung von  $s$  nach  $t$
- $\Leftrightarrow \exists$  kollisionsfreie Bewegung von  $u$  nach  $v$
- $\Leftrightarrow \exists$  kollisionsfreie Bewegung von jedem Punkt auf  $e_u$  zu jedem Punkt auf  $e_v$



## Beweis: Theorem 2.45

- $\exists$  kollisionsfreie Bewegung von  $s$  nach  $t$
- $\Leftrightarrow \exists$  kollisionsfreie Bewegung von  $u$  nach  $v$
- $\Leftrightarrow \exists$  kollisionsfreie Bewegung von jedem Punkt auf  $e_u$  zu jedem Punkt auf  $e_v$  (Bewegung entlang der Kanten ist stets möglich)

## Beweis: Theorem 2.45

- $\exists$  kollisionsfreie Bewegung von  $s$  nach  $t$
- $\Leftrightarrow \exists$  kollisionsfreie Bewegung von  $u$  nach  $v$
- $\Leftrightarrow \exists$  kollisionsfreie Bewegung von jedem Punkt auf  $e_u$  zu jedem Punkt auf  $e_v$  (Bewegung entlang der Kanten ist stets möglich)
- $\Leftrightarrow$  Kanten  $e_u$  und  $e_v$  auf Rand derselben Zusammenhangskomponente  $W$  von  $C_{\text{frei}}$

## Beweis: Theorem 2.45

- $\exists$  kollisionsfreie Bewegung von  $s$  nach  $t$
- $\Leftrightarrow \exists$  kollisionsfreie Bewegung von  $u$  nach  $v$
- $\Leftrightarrow \exists$  kollisionsfreie Bewegung von jedem Punkt auf  $e_u$  zu jedem Punkt auf  $e_v$  (Bewegung entlang der Kanten ist stets möglich)
- $\Leftrightarrow$  Kanten  $e_u$  und  $e_v$  auf Rand derselben Zusammenhangskomponente  $W$  von  $C_{\text{frei}}$
- $\Leftrightarrow$  (Lemma 2.46) Knoten  $(u, L(u)) = \Phi(s)$  und  $(v, L(v)) = \Phi(t)$  in derselben Zusammenhangskomponente  $Z$  von  $E$

# Bewegungen

# Bewegungen

- Theorem 2.45:

# Bewegungen

- **Theorem 2.45:** Weg in  $E \Leftrightarrow$  kollisionsfreier Weg in  $C_{frei}$  existiert

# Bewegungen

- **Theorem 2.45:** Weg in  $E \Leftrightarrow$  kollisionsfreier Weg in  $C_{frei}$  existiert
- Jetzt auch berechnen!

# Bewegungen

- **Theorem 2.45:** Weg in  $E \Leftrightarrow$  kollisionsfreier Weg in  $C_{frei}$  existiert
- Jetzt auch berechnen!
- An den Rand schieben!  $e_u, e_v$



# Bewegungen

- **Theorem 2.45:** Weg in  $E \Leftrightarrow$  kollisionsfreier Weg in  $C_{frei}$  existiert
- Jetzt auch berechnen!
- An den Rand schieben!  $e_u, e_v$
- Breitensuche in  $E$ , Weg von  $(u, L(u))$  nach  $(v, L(v))$

# Bewegungen

- **Theorem 2.45:** Weg in  $E \Leftrightarrow$  kollisionsfreier Weg in  $C_{frei}$  existiert
- Jetzt auch berechnen!
- An den Rand schieben!  $e_u, e_v$
- Breitensuche in  $E$ , Weg von  $(u, L(u))$  nach  $(v, L(v))$
- Existent?

# Bewegungen

- **Theorem 2.45:** Weg in  $E \Leftrightarrow$  kollisionsfreier Weg in  $C_{frei}$  existiert
- Jetzt auch berechnen!
- An den Rand schieben!  $e_u, e_v$
- Breitensuche in  $E$ , Weg von  $(u, L(u))$  nach  $(v, L(v))$
- Existent? Falls nein: Es existiert kein Weg!

# Bewegungen

- **Theorem 2.45:** Weg in  $E \Leftrightarrow$  kollisionsfreier Weg in  $C_{frei}$  existiert
- Jetzt auch berechnen!
- An den Rand schieben!  $e_u, e_v$
- Breitensuche in  $E$ , Weg von  $(u, L(u))$  nach  $(v, L(v))$
- Existent? Falls nein: Es existiert kein Weg!
- Falls ja: Diesen Weg Ablaufen!

# Weg in $E$ ablaufen

# Weg in $E$ ablaufen

- Weg in  $E$  ist Kantenfolge mit sukzessiven Knoten

# Weg in $E$ ablaufen

- Weg in  $E$  ist Kantenfolge mit sukzessiven Knoten
- $\pi = (\xi_1 = \Phi(s), \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_\ell = \Phi(t))$

# Weg in $E$ ablaufen

- Weg in  $E$  ist Kantenfolge mit sukzessiven Knoten
- $\pi = (\xi_1 = \Phi(s), \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_\ell = \Phi(t))$
- Übergang von  $\xi_i = (u_i, L(u_i))$  zu  $\xi_{i+1} = (u_{i+1}, L(u_{i+1}))$



# Weg in $E$ ablaufen

- Weg in  $E$  ist Kantenfolge mit sukzessiven Knoten
- $\pi = (\xi_1 = \Phi(s), \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_\ell = \Phi(t))$
- Übergang von  $\xi_i = (u_i, L(u_i))$  zu  $\xi_{i+1} = (u_{i+1}, L(u_{i+1}))$
- $\theta_i$  in Lebensdauer Kante  $[\xi_i, \xi_{i+1}]$

# Weg in $E$ ablaufen

- Weg in  $E$  ist Kantenfolge mit sukzessiven Knoten
- $\pi = (\xi_1 = \Phi(s), \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_\ell = \Phi(t))$
- Übergang von  $\xi_i = (u_i, L(u_i))$  zu  $\xi_{i+1} = (u_{i+1}, L(u_{i+1}))$
- $\theta_i$  in Lebensdauer Kante  $[\xi_i, \xi_{i+1}]$
- Start: An den Rand schieben!  $(u_1, L(u_1))$  entspricht Kante  $e_{u_1}$  in  $C_{frei}$

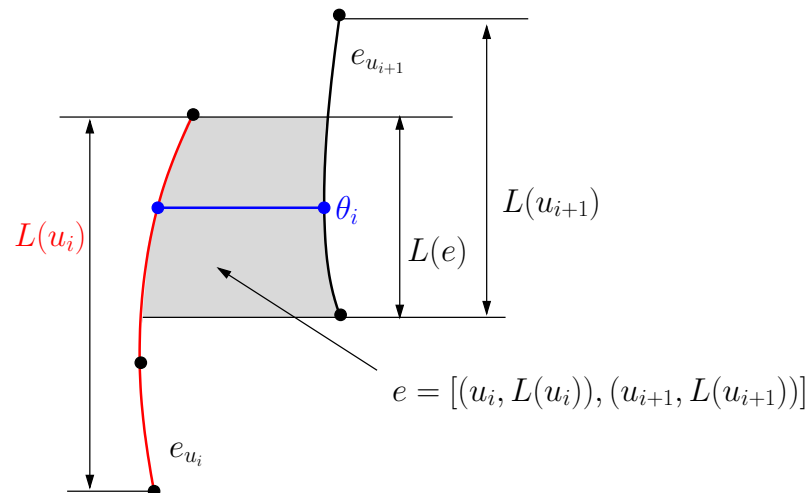
# Weg in $E$ ablaufen

- Weg in  $E$  ist Kantenfolge mit sukzessiven Knoten
- $\pi = (\xi_1 = \Phi(s), \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_\ell = \Phi(t))$
- Übergang von  $\xi_i = (u_i, L(u_i))$  zu  $\xi_{i+1} = (u_{i+1}, L(u_{i+1}))$
- $\theta_i$  in Lebensdauer Kante  $[\xi_i, \xi_{i+1}]$
- Start: An den Rand schieben!  $(u_1, L(u_1))$  entspricht Kante  $e_{u_1}$  in  $C_{frei}$
- Annahme: wir sind bereits auf Kante  $e_{u_i}$  in  $C_{frei}$

# Weg in $E$ ablaufen

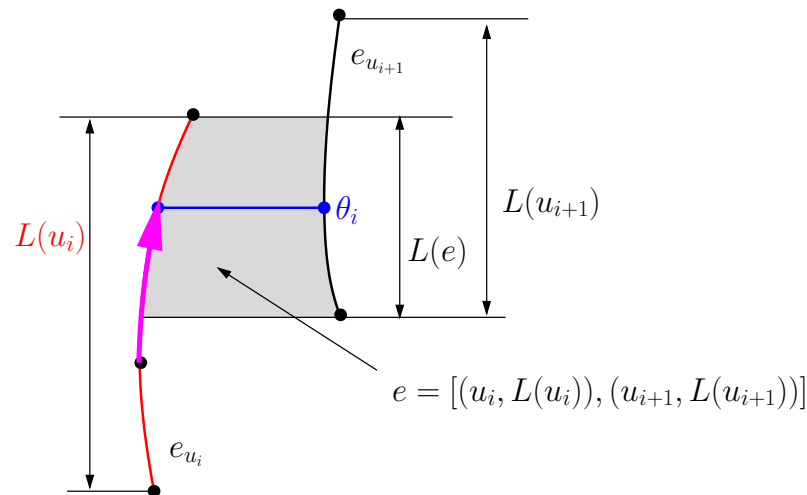
# Weg in $E$ ablaufen

- Übergang von  $\xi_i = (u_i, L(u_i))$  zu  $\xi_{i+1} = (u_{i+1}, L(u_{i+1}))$
- An Kante  $e_{u_i}$  in  $C_{frei}$  angekommen
- $\theta_i$  in Lebensdauer Kante  $[\xi_i, \xi_{i+1}]$



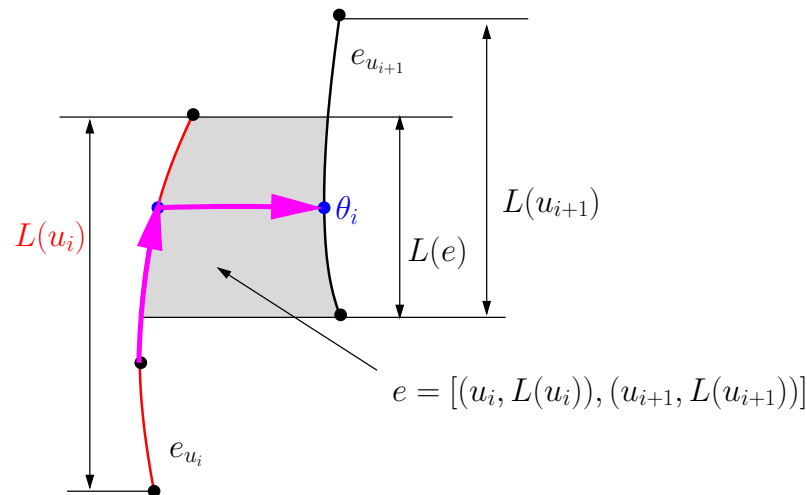
# Weg in $E$ ablaufen

- Übergang von  $\xi_i = (u_i, L(u_i))$  zu  $\xi_{i+1} = (u_{i+1}, L(u_{i+1}))$
- An Kante  $e_{u_i}$  in  $C_{frei}$  angekommen
- $\theta_i$  in Lebensdauer Kante  $[\xi_i, \xi_{i+1}]$
- Rotation entlang  $e_{u_i}$  bis  $\theta_i$  erreicht



# Weg in $E$ ablaufen

- Übergang von  $\xi_i = (u_i, L(u_i))$  zu  $\xi_{i+1} = (u_{i+1}, L(u_{i+1}))$
- An Kante  $e_{u_i}$  in  $C_{frei}$  angekommen
- $\theta_i$  in Lebensdauer Kante  $[\xi_i, \xi_{i+1}]$
- Rotation entlang  $e_{u_i}$  bis  $\theta_i$  erreicht
- Translation von  $e_{u_i}$  nach  $e_{u_{i+1}}$



# Algorithmus 2.13



# Algorithmus 2.13

- Macht genau das!

## Algorithmus 2.13

- Macht genau das!
- Start: An den Rand schieben!  $(u_1, L(u_1))$  entspricht Kante  $e_{u_1}$  in  $C_{frei}$

## Algorithmus 2.13

- Macht genau das!
- Start: An den Rand schieben!  $(u_1, L(u_1))$  entspricht Kante  $e_{u_1}$  in  $C_{frei}$
- Übergang von  $\xi_i = (u_i, L(u_i))$  zu  $\xi_{i+1} = (u_{i+1}, L(u_{i+1}))$

## Algorithmus 2.13

- Macht genau das!
- Start: An den Rand schieben!  $(u_1, L(u_1))$  entspricht Kante  $e_{u_1}$  in  $C_{frei}$
- Übergang von  $\xi_i = (u_i, L(u_i))$  zu  $\xi_{i+1} = (u_{i+1}, L(u_{i+1}))$
- Rotation entlang  $e_{u_i}$  bis  $\theta_i$  erreicht

## Algorithmus 2.13

- Macht genau das!
- Start: An den Rand schieben!  $(u_1, L(u_1))$  entspricht Kante  $e_{u_1}$  in  $C_{frei}$
- Übergang von  $\xi_i = (u_i, L(u_i))$  zu  $\xi_{i+1} = (u_{i+1}, L(u_{i+1}))$
- Rotation entlang  $e_{u_i}$  bis  $\theta_i$  erreicht
- Translation von  $e_{u_i}$  nach  $e_{u_{i+1}}$

## Algorithmus 2.13

- Macht genau das!
- Start: An den Rand schieben!  $(u_1, L(u_1))$  entspricht Kante  $e_{u_1}$  in  $C_{frei}$
- Übergang von  $\xi_i = (u_i, L(u_i))$  zu  $\xi_{i+1} = (u_{i+1}, L(u_{i+1}))$
- Rotation entlang  $e_{u_i}$  bis  $\theta_i$  erreicht
- Translation von  $e_{u_i}$  nach  $e_{u_{i+1}}$
- Ende: Vom Rand wegschieben!  $(u_l, L(u_l))$  entspricht Kante  $e_{u_l}$  in  $C_{frei}$

# Theorem 2.47

## Theorem 2.47

- Konvexer Roboter  $R$ , polygonale Szene  $P$



## Theorem 2.47

- Konvexer Roboter  $R$ , polygonale Szene  $P$
- Translation und Rotation

## Theorem 2.47

- Konvexer Roboter  $R$ , polygonale Szene  $P$
- Translation und Rotation
- Zeit:  $O(mn \lambda_6(mn) \log(mn))$ , Komplexität:  $O(mn \lambda_6(mn))$

## Theorem 2.47

- Konvexer Roboter  $R$ , polygonale Szene  $P$
- Translation und Rotation
- Zeit:  $O(mn \lambda_6(mn) \log(mn))$ , Komplexität:  $O(mn \lambda_6(mn))$
- Kollisionsfreie Bahn von  $s$  nach  $t$ ?

## Theorem 2.47

- Konvexer Roboter  $R$ , polygonale Szene  $P$
- Translation und Rotation
- Zeit:  $O(mn \lambda_6(mn) \log(mn))$ , Komplexität:  $O(mn \lambda_6(mn))$
- Kollisionsfreie Bahn von  $s$  nach  $t$ ?
- Falls existent: Angeben

## Theorem 2.47

- Konvexer Roboter  $R$ , polygonale Szene  $P$
- Translation und Rotation
- Zeit:  $O(mn \lambda_6(mn) \log(mn))$ , Komplexität:  $O(mn \lambda_6(mn))$
- Kollisionsfreie Bahn von  $s$  nach  $t$ ?
- Falls existent: Angeben
- Beweis: Gerade geführt!

# Bemerkungen

# Bemerkungen

- Untere Schranke Komp:  $\Omega((mn)^2)$ ,  $O(mn\lambda_6(mn))$ ; Laufzeit:  $O(mn\lambda_6(mn) \log(mn))$

# Bemerkungen

- Untere Schranke Komp:  $\Omega((mn)^2)$ ,  $O(mn\lambda_6(mn))$ ; Laufzeit:  
 $O(mn\lambda_6(mn) \log(mn))$
- Spezialfall Leiter  $O(n^2 \log n)$



# Bemerkungen

- Untere Schranke Komp:  $\Omega((mn)^2)$ ,  $O(mn\lambda_6(mn))$ ; Laufzeit:  $O(mn\lambda_6(mn) \log(mn))$
- Spezialfall Leiter  $O(n^2 \log n)$
- Ganz  $C_{frei}$  auch in  $O(mn\lambda_6(mn) \log(mn))$

# Bemerkungen

- Untere Schranke Komp:  $\Omega((mn)^2)$ ,  $O(mn\lambda_6(mn))$ ; Laufzeit:  $O(mn\lambda_6(mn) \log(mn))$
- Spezialfall Leiter  $O(n^2 \log n)$
- Ganz  $C_{frei}$  auch in  $O(mn\lambda_6(mn) \log(mn))$
- Nicht konvex: Komp:  $\Omega((mn)^3)$ ; Laufzeit:  $O((mn)^3 \log(mn))$

# Bemerkungen

- Untere Schranke Komp:  $\Omega((mn)^2)$ ,  $O(mn\lambda_6(mn))$ ; Laufzeit:  $O(mn\lambda_6(mn) \log(mn))$
- Spezialfall Leiter  $O(n^2 \log n)$
- Ganz  $C_{frei}$  auch in  $O(mn\lambda_6(mn) \log(mn))$
- Nicht konvex: Komp:  $\Omega((mn)^3)$ ; Laufzeit:  $O((mn)^3 \log(mn))$

