# Logik und diskrete Strukturen WS 2014/15
# Übungsblatt 9
# Universität Bonn, Institut für Informatik I

Abgabe: Dienstag 9.12.2014, bis 10:15 Uhr  Besprechung: KW 51

- *Die Lösungen können bis zum Abgabetermin in den Postkasten im AVZ III eingeworfen werden (vom Haupteingang in dem kleinen Raum auf der linken Seite). Geben Sie bitte immer gut sichtbar auf dem Deckblatt die Übungsgruppennummer an.*
- *Die Abgabe in festen Gruppen bis zu 3 Personen ist erlaubt, sofern alle in der gleichen Übungsgruppe sind.*

**Aufgabe 1:** **Restklassen** 2+1+1 Punkte

Betrachten Sie die Strukturen $S_1 = (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, \odot_5)$ und $S_2 = (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, \odot_6)$.

**a)** Geben Sie die Verknüpfungstafeln von $S_1$ und $S_2$ an.

**b)** Welche Eigenschaften (Assoziativität, Kommutativität, Existenz eines neutralen Elementes) besitzen $S_1$ und $S_2$ jeweils?

**c)** Geben Sie für $S_1$ und $S_2$ die Menge der invertierbaren Elemente an.

**Aufgabe 2:** **Ringeigenschaften** 1+1+1+1 Punkte + 2 Zusatzpunkte

Sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit Eins mit neutralem Element der Addition $0 \in R$ und neutralem Element der Multiplikation $1 \in R$ und sei $1 \neq 0$. Zeigen Sie:

**a)** Ist $a \in R$, so gilt $(-1) \cdot a = -a$.

**b)** Sind $a, r \in R^*$, so folgt aus $a \cdot r = a$, dass $r = 1$ ist.

**c)** Sind $a, r \in R$, so folgt im Allgemeinen nicht aus $a \cdot r = a$, dass $r = 1$ ist.

**d)** Sind $a, b \in R$, so folgt im Allgemeinen nicht aus $a \cdot b = 0$, dass $a + 1$ oder $b + 1$ eine Einheit ist.

**e)** Ist $a \in R$ und $a \cdot a = 0$, dann ist $a + 1$ eine Einheit.

**Aufgabe 3:** **Größter gemeinsamer Teiler** 2+2 Punkte

Betrachten Sie die Zahlen $x_0 = 8778$ und $x_1 = 3230$. Berechnen Sie den $\mathrm{ggT}(x_0, x_1)$

**a)** mit der Primfaktorzerlegung.

**b)** mit dem euklidischen Algorithmus.

Geben Sie wie immer den Rechenweg an.

**Aufgabe 4:** **Euklidischer Algorithmus** 4 Punkte

Der euklidische Algorithmus aus der Vorlesung durchläuft eine while-Schleife solange, bis $b$ gleich 0 ist. Sei die Folge der Fibonacci-Zahlen $f_n$ durch folgende Rekursion definiert:

$$f_0 = 0, f_1 = 1 \text{ und für alle } n \geq 0 : f_{n+2} = f_n + f_{n+1}.$$

Beweisen Sie, dass für jedes $k \geq 2$ gilt: Der euklidische Algorithmus durchläuft die while-Schleife genau $(k-1)$-mal, wenn er auf das Zahlenpaar $(f_{k+1}, f_k)$ angewandt wird.