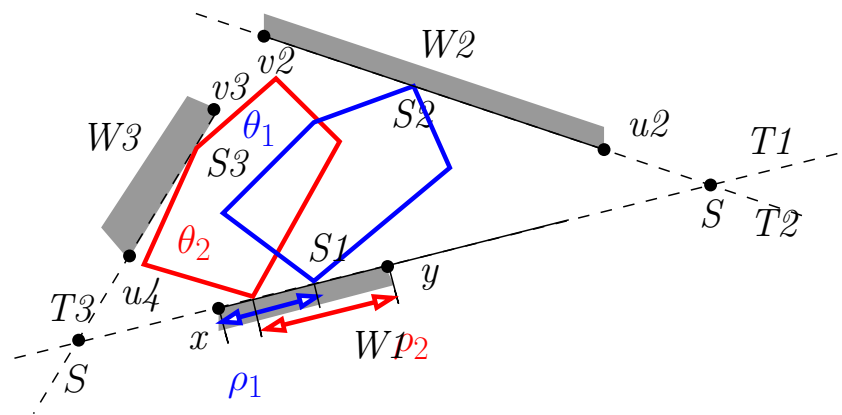


Offline Bewegungsplanung: Kritische Platzierungen

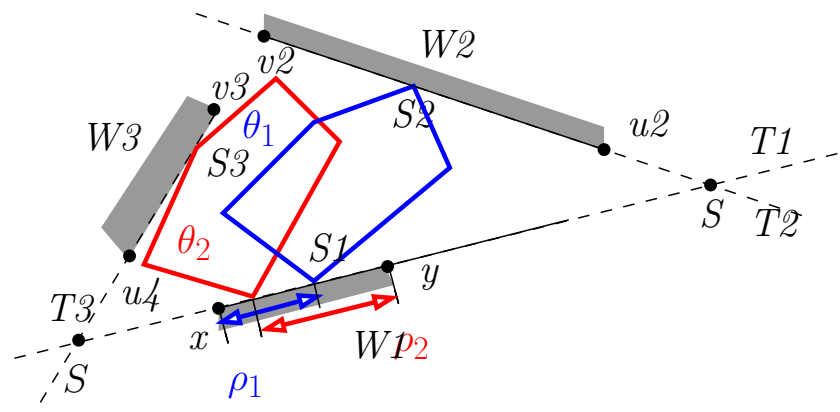
Elmar Langetepe
University of Bonn

Besonderheiten der Arrangements $A(O_i)$!



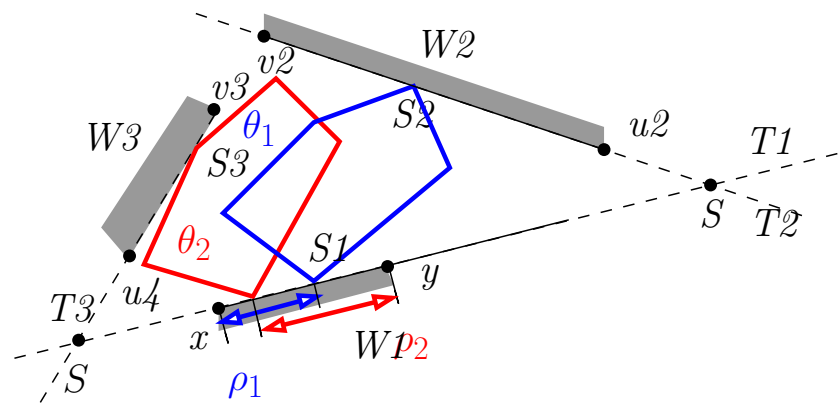
Besonderheiten der Arrangements $A(O_i)$!

- Ein O_i kann zwei verschiedene Arrangements besitzen



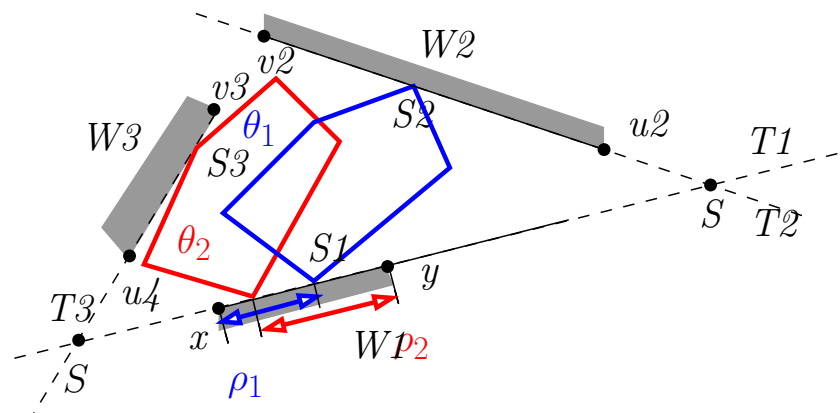
Besonderheiten der Arrangements $A(O_i)$!

- Ein O_i kann zwei verschiedene Arrangements besitzen
- Je nachdem in welche Richtung wir schieben müssen



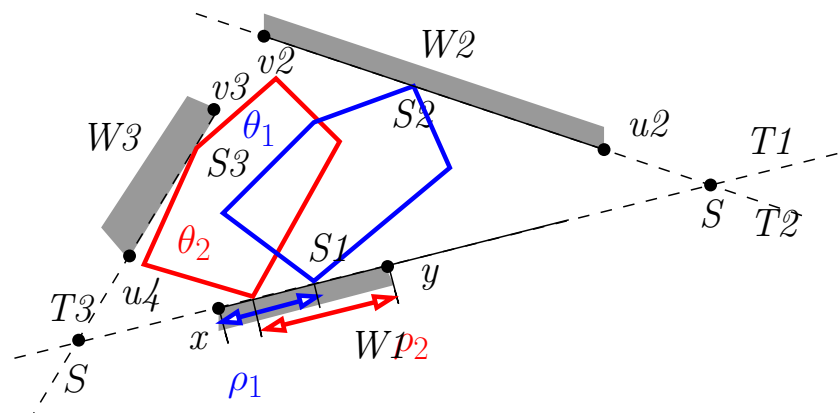
Besonderheiten der Arrangements $A(O_i)$!

- Ein O_i kann zwei verschiedene Arrangements besitzen
- Je nachdem in welche Richtung wir schieben müssen
- Arrangements $A_L(O_i)$ und $A_R(O_i)$



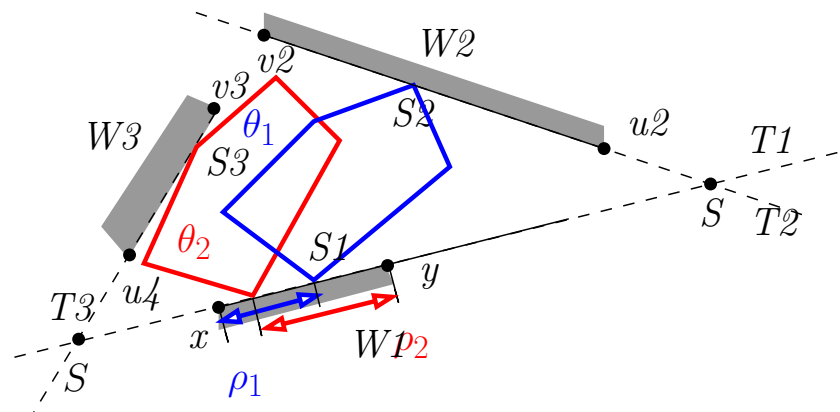
Besonderheiten der Arrangements $A(O_i)$!

- Ein O_i kann zwei verschiedene Arrangements besitzen
- Je nachdem in welche Richtung wir schieben müssen
- Arrangements $A_L(O_i)$ und $A_R(O_i)$
- Aufwand verdoppelt



Besonderheiten der Arrangements $A(O_i)$!

- Ein O_i kann zwei verschiedene Arrangements besitzen
- Je nachdem in welche Richtung wir schieben müssen
- Arrangements $A_L(O_i)$ und $A_R(O_i)$
- Aufwand verdoppelt
- Definitionsbereich kann zerfallen!



Kandidaten Krit. Platz. Def. 2.37

Kandidaten Krit. Platz. Def. 2.37

T^+ Platzierungen (x, y, θ) :

Kandidaten Krit. Platz. Def. 2.37

T^+ Platzierungen (x, y, θ) :

- a Ecken untere Konturen der $O(mn)$ Arrangements $A(O_i)$

Kandidaten Krit. Platz. Def. 2.37

T^+ Platzierungen (x, y, θ) :

- a** Ecken untere Konturen der $O(mn)$ Arrangements $A(O_i)$
- b** Zyklische Tripel von Kontaktpaaren (O_1, O_2, O_3) :

Kandidaten Krit. Platz. Def. 2.37

T^+ Platzierungen (x, y, θ) :

a Ecken untere Konturen der $O(mn)$
Arrangements $A(O_i)$

b Zyklische Tripel von Kontaktpaaren
 (O_1, O_2, O_3) :

- O_1 beschränkt O_3 , O_3 beschränkt O_2 und O_2 beschränkt O_1 .

Kandidaten Krit. Platz. Def. 2.37

T^+ Platzierungen (x, y, θ) :

a Ecken untere Konturen der $O(mn)$

Arrangements $A(O_i)$

b Zyklische Tripel von Kontaktpaaren

(O_1, O_2, O_3) :

- O_1 beschränkt O_3 , O_3 beschränkt O_2 und O_2 beschränkt O_1 .
- Tripel liefert ≤ 4 Platzierungen

Kandidaten Krit. Platz. Def. 2.37

T^+ Platzierungen (x, y, θ) :

a Ecken untere Konturen der $O(mn)$
Arrangements $A(O_i)$

b Zyklische Tripel von Kontaktpaaren
 (O_1, O_2, O_3) :

- O_1 beschränkt O_3 , O_3 beschränkt O_2 und O_2 beschränkt O_1 .
- Tripel liefert ≤ 4 Platzierungen
Platzierungen durch (ρ_1, θ) (oder $(\rho_2, \theta), (\rho_3, \theta)$) festgelegt.

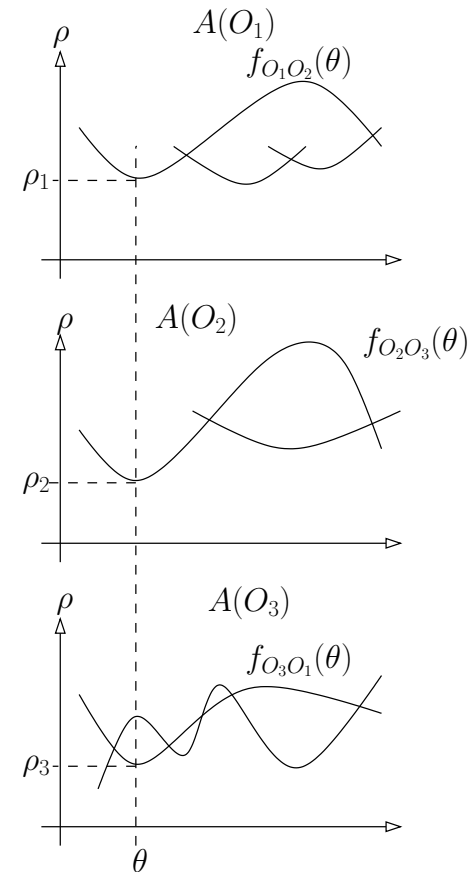
Kandidaten Krit. Platz. Def. 2.37

T^+ Platzierungen (x, y, θ) :

a Ecken untere Konturen der $O(mn)$ Arrangements $A(O_i)$

b Zyklische Tripel von Kontaktpaaren (O_1, O_2, O_3) :

- O_1 beschränkt O_3 , O_3 beschränkt O_2 und O_2 beschränkt O_1 .
- Tripel liefert ≤ 4 Platzierungen durch (ρ_1, θ) (oder $(\rho_2, \theta), (\rho_3, \theta)$) festgelegt.
- Nullstellen einer Kurve 4. Grades.



T^+ berechnen **Theorem 2.38**

T^+ berechnen **Theorem 2.38**

T^+ kann in Zeit $O(mn\lambda_6(mn) \log(mn))$ berechnet werden!

T^+ berechnen **Theorem 2.38**

T^+ kann in Zeit $O(mn\lambda_6(mn) \log(mn))$ berechnet werden!

Beweis!!

T^+ berechnen **Theorem 2.38**

T^+ kann in Zeit $O(mn\lambda_6(mn) \log(mn))$ berechnet werden!

Beweis!!

Vorsicht: T^+ kann noch verbotene Platzierungen enthalten!!!

Bislang gar nicht überprüft!!

T^+ berechnen **Alg. 2.8** Arrangements aufbauen!

T^+ berechnen **Alg. 2.8** Arrangements aufbauen!

- Kontaktpaar O_i

T^+ berechnen **Alg. 2.8** Arrangements aufbauen!

- Kontaktpaar O_i
- $\Pi_{O_i O_k} := \{ \theta \mid O_k \text{ beschränkt } O_i \text{ bei Winkel } \theta \}$.

T^+ berechnen **Alg. 2.8** Arrangements aufbauen!

- Kontaktpaar O_i
- $\Pi_{O_i O_k} := \{ \theta | O_k \text{ beschränkt } O_i \text{ bei Winkel } \theta \}$.
- $O(nm)$ mal $O(nm)$

T^+ berechnen **Alg. 2.8** Arrangements aufbauen!

- Kontaktpaar O_i
- $\Pi_{O_i O_k} := \{ \theta | O_k \text{ beschränkt } O_i \text{ bei Winkel } \theta \}$.
- $O(nm)$ mal $O(nm)$
- Bilde Funktionen

T^+ berechnen **Alg. 2.8** Arrangements aufbauen!

- Kontaktpaar O_i
- $\Pi_{O_i O_k} := \{ \theta | O_k \text{ beschränkt } O_i \text{ bei Winkel } \theta \}$.
- $O(nm)$ mal $O(nm)$
- Bilde Funktionen
- Bilde Arrangements $A(O_i)$

T^+ berechnen **Alg. 2.8** Arrangements aufbauen!

- Kontaktpaar O_i
- $\Pi_{O_i O_k} := \{ \theta | O_k \text{ beschränkt } O_i \text{ bei Winkel } \theta \}$.
- $O(nm)$ mal $O(nm)$
- Bilde Funktionen
- Bilde Arrangements $A(O_i)$
- `KritPlatz.html`

T^+ berechnen **Alg. 2.8** Arrangements aufbauen!

- Kontaktpaar O_i
- $\Pi_{O_i O_k} := \{ \theta | O_k \text{ beschränkt } O_i \text{ bei Winkel } \theta \}$.
- $O(nm)$ mal $O(nm)$
- Bilde Funktionen
- Bilde Arrangements $A(O_i)$
- `KritPlatz.html`
- $O((nm)^2)$

T^+ berechnen: **Alg. 2.8** Untere Konturen
 $UK(A(O_i))$

T^+ berechnen: **Alg. 2.8** Untere Konturen

$$UK(A(O_i))$$

- $O(nm)$ Arrangements $A(O_i)$

T^+ berechnen: **Alg. 2.8** Untere Konturen $UK(A(O_i))$

- $O(nm)$ Arrangements $A(O_i)$
- Funktionen schneiden sich maximal 4 mal

T^+ berechnen: **Alg. 2.8** Untere Konturen

$UK(A(O_i))$

- $O(nm)$ Arrangements $A(O_i)$
- Funktionen schneiden sich maximal 4 mal
- Divide and Conquer

T^+ berechnen: **Alg. 2.8** Untere Konturen $UK(A(O_i))$

- $O(nm)$ Arrangements $A(O_i)$
- Funktionen schneiden sich maximal 4 mal
- Divide and Conquer
- Merge: Zwei Konturen, Sweep $O(2\lambda_6((mn)/2))$:

T^+ berechnen: **Alg. 2.8** Untere Konturen $UK(A(O_i))$

- $O(nm)$ Arrangements $A(O_i)$
- Funktionen schneiden sich maximal 4 mal
- Divide and Conquer
- Merge: Zwei Konturen, Sweep $O(2\lambda_6((mn)/2))$:
Komplexität gesamte Kontur $O(\lambda_6(mn))!!$

T^+ berechnen: **Alg. 2.8** Untere Konturen $UK(A(O_i))$

- $O(nm)$ Arrangements $A(O_i)$
- Funktionen schneiden sich maximal 4 mal
- Divide and Conquer
- Merge: Zwei Konturen, Sweep $O(2\lambda_6((mn)/2))$:
Komplexität gesamte Kontur $O(\lambda_6(mn))!!$
- Eine Kontur in $O(\lambda_6(mn) \log(mn))$

T^+ berechnen: **Alg. 2.8** Untere Konturen $UK(A(O_i))$

- $O(nm)$ Arrangements $A(O_i)$
- Funktionen schneiden sich maximal 4 mal
- Divide and Conquer
- Merge: Zwei Konturen, Sweep $O(2\lambda_6((mn)/2))$:
Komplexität gesamte Kontur $O(\lambda_6(mn))!!$
- Eine Kontur in $O(\lambda_6(mn) \log(mn))$
- Alle unteren Konturen in $O(mn\lambda_6(mn) \log(mn))$

T^+ berechnen: **Alg. 2.8** Untere Konturen
 $UK(A(O_i))$

T^+ berechnen: **Alg. 2.8** Untere Konturen
 $UK(A(O_i))$

- Merge: Zwei Konturen mergen, Sweep, $O(\lambda_6(mn))$

T^+ berechnen: **Alg. 2.8** Untere Konturen

$$UK(A(O_i))$$

- Merge: Zwei Konturen mergen, Sweep, $O(\lambda_6(mn))$
- Divide and Conquer abschätzen

T^+ berechnen: **Alg. 2.8** Untere Konturen

$$UK(A(O_i))$$

- Merge: Zwei Konturen mergen, Sweep, $O(\lambda_6(mn))$
- Divide and Conquer abschätzen
- $T(mn) = 2T\left(\frac{mn}{2}\right) + C \times \lambda_6(mn)$

T^+ berechnen: **Alg. 2.8** Untere Konturen

$$UK(A(O_i))$$

- Merge: Zwei Konturen mergen, Sweep, $O(\lambda_6(mn))$
- Divide and Conquer abschätzen
- $T(mn) = 2T\left(\frac{mn}{2}\right) + C \times \lambda_6(mn)$
- $T(mn) \leq \dots \leq 2^k T(1) + C \times \sum_{i=0}^{\log(nm)} 2^i \lambda_6\left(\frac{mn}{2^i}\right)$

T^+ berechnen: **Alg. 2.8** Untere Konturen $UK(A(O_i))$

- Merge: Zwei Konturen mergen, Sweep, $O(\lambda_6(mn))$
- Divide and Conquer abschätzen
- $T(mn) = 2T\left(\frac{mn}{2}\right) + C \times \lambda_6(mn)$
- $T(mn) \leq \dots \leq 2^k T(1) + C \times \sum_{i=0}^{\log(nm)} 2^i \lambda_6\left(\frac{mn}{2^i}\right)$
- $2\lambda_s(n) \leq \lambda_s(2n), 2^i \lambda_s\left(\frac{n}{2^i}\right) \leq \lambda_s(n)$

T^+ berechnen: **Alg. 2.8** Untere Konturen $UK(A(O_i))$

- Merge: Zwei Konturen mergen, Sweep, $O(\lambda_6(mn))$
- Divide and Conquer abschätzen
- $T(mn) = 2T\left(\frac{mn}{2}\right) + C \times \lambda_6(mn)$
- $T(mn) \leq \dots \leq 2^k T(1) + C \times \sum_{i=0}^{\log(nm)} 2^i \lambda_6\left(\frac{mn}{2^i}\right)$
- $2\lambda_s(n) \leq \lambda_s(2n)$, $2^i \lambda_s\left(\frac{n}{2^i}\right) \leq \lambda_s(n)$
- $T(mn) \leq C \times \lambda_6(mn) \log(mn)$

T^+ berechnen: **Alg. 2.8** Platzierungen!

T^+ berechnen: **Alg. 2.8** Platzierungen!

- Fall 1: Knoten der unteren Konturen: $O(mn\lambda_6(mn))$ viele

T^+ berechnen: **Alg. 2.8** Platzierungen!

- Fall 1: Knoten der unteren Konturen: $O(mn\lambda_6(mn))$ viele
- Fall 2: Zyklische Tripel! Alle Konturen betrachten

T^+ berechnen: **Alg. 2.8** Platzierungen!

- Fall 1: Knoten der unteren Konturen: $O(mn\lambda_6(mn))$ viele
- Fall 2: Zyklische Tripel! Alle Konturen betrachten
- Sortieren aller Knoten: Sortieren von sortierten Mengen

T^+ berechnen: **Alg. 2.8** Platzierungen!

- Fall 1: Knoten der unteren Konturen: $O(mn\lambda_6(mn))$ viele
- Fall 2: Zyklische Tripel! Alle Konturen betrachten
- Sortieren aller Knoten: Sortieren von sortierten Mengen
- $O(mn)$ Arrangements mit je $\lambda_6(mn)$ sortierten Knoten

T^+ berechnen: **Alg. 2.8** Platzierungen!

- Fall 1: Knoten der unteren Konturen: $O(mn\lambda_6(mn))$ viele
- Fall 2: Zyklische Tripel! Alle Konturen betrachten
- Sortieren aller Knoten: Sortieren von sortierten Mengen
- $O(mn)$ Arrangements mit je $\lambda_6(mn)$ sortierten Knoten
- Durch simultanen Sweep: $O(mn\lambda_6(mn)\log(mn))$

T^+ berechnen: **Alg. 2.8** Platzierungen!

- Fall 1: Knoten der unteren Konturen: $O(mn\lambda_6(mn))$ viele
- Fall 2: Zyklische Tripel! Alle Konturen betrachten
- Sortieren aller Knoten: Sortieren von sortierten Mengen
- $O(mn)$ Arrangements mit je $\lambda_6(mn)$ sortierten Knoten
- Durch simultanen Sweep: $O(mn\lambda_6(mn)\log(mn))$
- Intervalle I_k sukzessive abarbeiten

T^+ berechnen: **Alg. 2.8** Intervall $I_0!$

T^+ berechnen: **Alg. 2.8** Intervall I_0 !

- Beginne bei I_0 : Für jedes vorhandene O_i teste Zyklus!

T^+ berechnen: **Alg. 2.8** Intervall I_0 !

- Beginne bei I_0 : Für jedes vorhandene O_i teste Zyklus!
- Falls Zyklus vorhanden: Berechne max. 4 zugehörige Krit. Platzierungen

T^+ berechnen: **Alg. 2.8** Intervall I_0 !

- Beginne bei I_0 : Für jedes vorhandene O_i teste Zyklus!
- Falls Zyklus vorhanden: Berechne max. 4 zugehörige Krit. Platzierungen
- Berichte die Elemente aus W , deren Winkel in I_0 liegt

T^+ berechnen: **Alg. 2.8** Intervall I_0 !

- Beginne bei I_0 : Für jedes vorhandene O_i teste Zyklus!
- Falls Zyklus vorhanden: Berechne max. 4 zugehörige Krit. Platzierungen
- Berichte die Elemente aus W , deren Winkel in I_0 liegt
- Füge andere Platzierungen in Warteschlange W nach Winkeln ein

T^+ berechnen: **Alg. 2.8** Intervall I_0 !

- Beginne bei I_0 : Für jedes vorhandene O_i teste Zyklus!
- Falls Zyklus vorhanden: Berechne max. 4 zugehörige Krit. Platzierungen
- Berichte die Elemente aus W , deren Winkel in I_0 liegt
- Füge andere Platzierungen in Warteschlange W nach Winkeln ein
- Aufwand: $O(mn)$ O_i s, Ermitteln und Einfügen: $O(mn \log mn)$

T^+ berechnen: **Alg. 2.8** I_k zu I_{k+1} !

T^+ berechnen: **Alg. 2.8** I_k zu I_{k+1} !

- Endpunkt von $A(O_1)$ markiert Übergang

T^+ berechnen: **Alg. 2.8** I_k zu I_{k+1} !

- Endpunkt von $A(O_1)$ markiert Übergang
- Annahme: Von $f_{O_1O_2}$ nach $f_{O_1O_4}$

T^+ berechnen: **Alg. 2.8** I_k zu I_{k+1} !

- Endpunkt von $A(O_1)$ markiert Übergang
- Annahme: Von $f_{O_1O_2}$ nach $f_{O_1O_4}$
- O_1 hatte über I_k einen Zyklus mit O_2 : entferne aus W die zu (O_1, O_2, O_s) gehörenden kritischen Platzierungen, da diese nicht mehr aktuell sind (Untere Kontur wechselt!)

T^+ berechnen: **Alg. 2.8** I_k zu I_{k+1} !

- Endpunkt von $A(O_1)$ markiert Übergang
- Annahme: Von $f_{O_1O_2}$ nach $f_{O_1O_4}$
- O_1 hatte über I_k einen Zyklus mit O_2 : entferne aus W die zu (O_1, O_2, O_s) gehörenden kritischen Platzierungen, da diese nicht mehr aktuell sind (Untere Kontur wechselt!)
- Teste O_1, O_4 einen Zyklus (O_1, O_4, O_t) über I_{k+1} . Falls ja, berechne wie oben die kritischen Platzierungen. Berichten oder Einfügen

T^+ berechnen: **Alg. 2.8** I_k zu I_{k+1} !

- Endpunkt von $A(O_1)$ markiert Übergang
- Annahme: Von $f_{O_1O_2}$ nach $f_{O_1O_4}$
- O_1 hatte über I_k einen Zyklus mit O_2 : entferne aus W die zu (O_1, O_2, O_s) gehörenden kritischen Platzierungen, da diese nicht mehr aktuell sind (Untere Kontur wechselt!)
- Teste O_1, O_4 einen Zyklus (O_1, O_4, O_t) über I_{k+1} . Falls ja, berechne wie oben die kritischen Platzierungen. Berichten oder Einfügen
- Berichte alle in W gespeicherten Platzierungen $(\theta, (O_i, O_k, O_\ell))$ mit $\theta \in I_{k+1}$, entfernen aus W

T^+ berechnen: **Alg. 2.8** I_k zu I_{k+1} !

- Endpunkt von $A(O_1)$ markiert Übergang
- Annahme: Von $f_{O_1O_2}$ nach $f_{O_1O_4}$
- O_1 hatte über I_k einen Zyklus mit O_2 : entferne aus W die zu (O_1, O_2, O_s) gehörenden kritischen Platzierungen, da diese nicht mehr aktuell sind (Untere Kontur wechselt!)
- Teste O_1, O_4 einen Zyklus (O_1, O_4, O_t) über I_{k+1} . Falls ja, berechne wie oben die kritischen Platzierungen. Berichten oder Einfügen
- Berichte alle in W gespeicherten Platzierungen $(\theta, (O_i, O_k, O_\ell))$ mit $\theta \in I_{k+1}$, entfernen aus W
- Aufwand: $O(mn\lambda_6(nm))$ Intervalle,

T^+ berechnen: **Alg. 2.8** I_k zu I_{k+1} !

- Endpunkt von $A(O_1)$ markiert Übergang
- Annahme: Von $f_{O_1O_2}$ nach $f_{O_1O_4}$
- O_1 hatte über I_k einen Zyklus mit O_2 : entferne aus W die zu (O_1, O_2, O_s) gehörenden kritischen Platzierungen, da diese nicht mehr aktuell sind (Untere Kontur wechselt!)
- Teste O_1, O_4 einen Zyklus (O_1, O_4, O_t) über I_{k+1} . Falls ja, berechne wie oben die kritischen Platzierungen. Berichten oder Einfügen
- Berichte alle in W gespeicherten Platzierungen $(\theta, (O_i, O_k, O_\ell))$ mit $\theta \in I_{k+1}$, entfernen aus W
- Aufwand: $O(mn\lambda_6(nm))$ Intervalle, W hat max. $O(mn\lambda_6(mn))$ Einträge, insgesamt: $O(mn\lambda_6(mn) \log(mn))$

T^+ berechnen **Theorem 2.38**

T^+ berechnen **Theorem 2.38**

T^+ kann in Zeit $O(mn\lambda_6(mn) \log(mn))$ berechnet werden!

2.3.2 Kantengraph und Knotengraph

2.3.2 Kantengraph und Knotengraph

- T^+ berechnet,

2.3.2 Kantengraph und Knotengraph

- T^+ berechnet, wichtigste Berechnung

2.3.2 Kantengraph und Knotengraph

- T^+ berechnet, wichtigste Berechnung
- Idee: Bewegung durch $3D$ in C_{frei} und Änderungen des Konfigurationsraumes beobachten

2.3.2 Kantengraph und Knotengraph

- T^+ berechnet, wichtigste Berechnung
- Idee: Bewegung durch $3D$ in C_{frei} und Änderungen des Konfigurationsraumes beobachten
- Startrotation θ : C_{frei}^θ

2.3.2 Kantengraph und Knotengraph

- T^+ berechnet, wichtigste Berechnung
- Idee: Bewegung durch $3D$ in C_{frei} und Änderungen des Konfigurationsraumes beobachten
- Startrotation θ : C_{frei}^θ
- C_{frei}^θ :

2.3.2 Kantengraph und Knotengraph

- T^+ berechnet, wichtigste Berechnung
- Idee: Bewegung durch $3D$ in C_{frei} und Änderungen des Konfigurationsraumes beobachten
- Startrotation θ : C_{frei}^θ
- C_{frei}^θ : Komplexität: $O(mn)$,

2.3.2 Kantengraph und Knotengraph

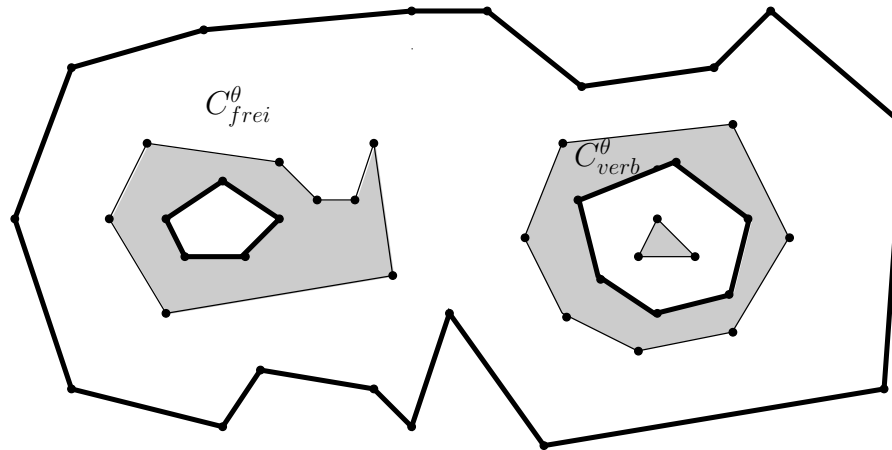
- T^+ berechnet, wichtigste Berechnung
- Idee: Bewegung durch $3D$ in C_{frei} und Änderungen des Konfigurationsraumes beobachten
- Startrotation θ : C_{frei}^θ
- C_{frei}^θ : Komplexität: $O(mn)$, Berechnung: $O(mn \log^2(mn))$

2.3.2 Kantengraph und Knotengraph

- T^+ berechnet, wichtigste Berechnung
- Idee: Bewegung durch $3D$ in C_{frei} und Änderungen des Konfigurationsraumes beobachten
- Startrotation θ : C_{frei}^θ
- C_{frei}^θ : Komplexität: $O(mn)$, Berechnung: $O(mn \log^2(mn))$
- Rand um Szene: Alle C_{frei}^θ beschränkt

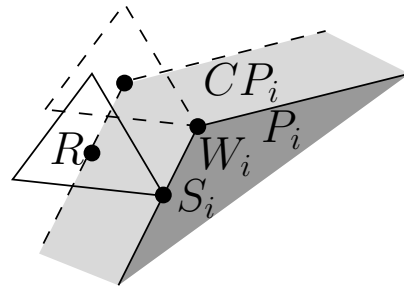
2.3.2 Kantengraph und Knotengraph

- T^+ berechnet, wichtigste Berechnung
- Idee: Bewegung durch $3D$ in C_{frei} und Änderungen des Konfigurationsraumes beobachten
- Startrotation θ : C_{frei}^θ
- C_{frei}^θ : Komplexität: $O(mn)$, Berechnung: $O(mn \log^2(mn))$
- Rand um Szene: Alle C_{frei}^θ beschränkt

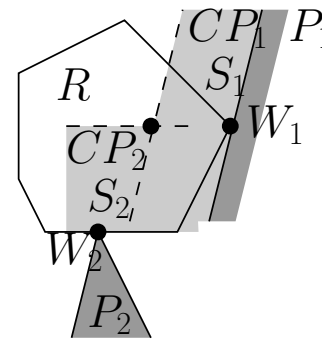


Knoten in C_{frei}^θ betrachten

- Konkave oder konvexe Knoten in pol. Szene
- Entsteht durch beteiligte Kontaktpaare und Referenzpunkt
- Ecke/Ecke oder zwei Ecke/Kante Kontaktpaare
- Änderungen über θ ermitteln

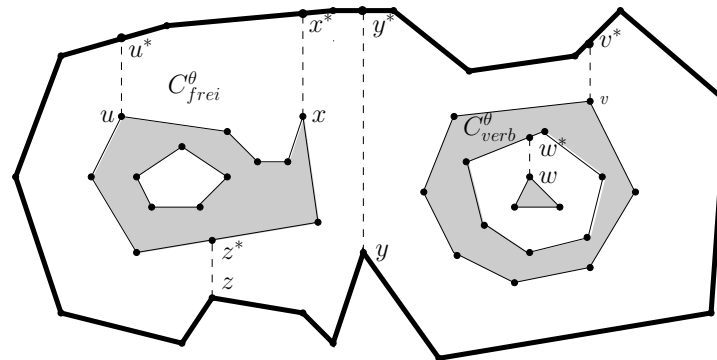


(i) konvex



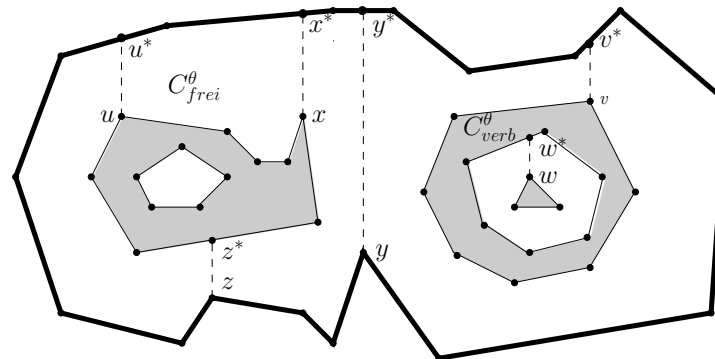
(ii) konkav

Knotengraph V^θ : Def.:2.39



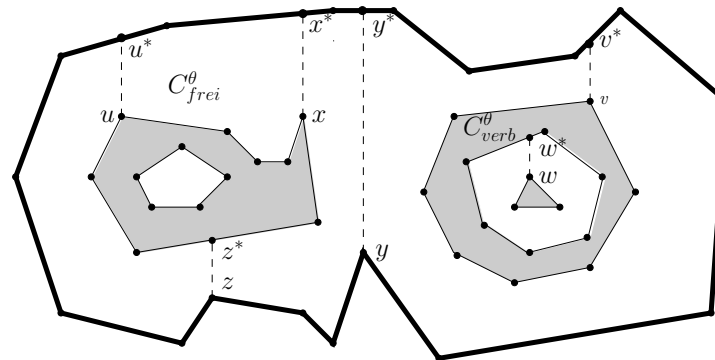
Knotengraph V^θ : Def.:2.39

- Graph, repräsentiert die Struktur von C_{frei}^θ



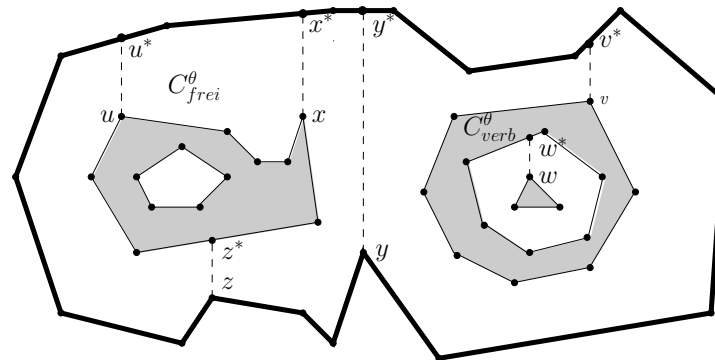
Knotengraph V^θ : Def.:2.39

- Graph, repräsentiert die Struktur von C_{frei}^θ
- Knoten der Polygone von C_{frei}^θ



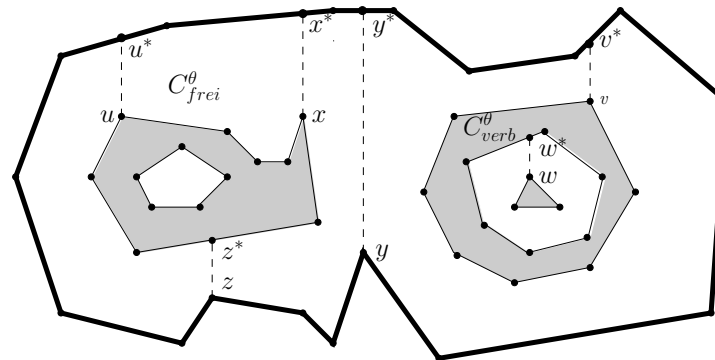
Knotengraph V^θ : Def.:2.39

- Graph, repräsentiert die Struktur von C_{frei}^θ
- Knoten der Polygone von C_{frei}^θ
- Lokal Y -max. Knoten u ,



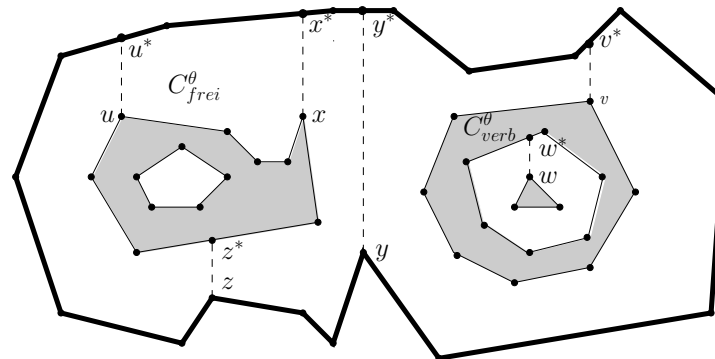
Knotengraph V^θ : Def.:2.39

- Graph, repräsentiert die Struktur von C_{frei}^θ
- Knoten der Polygone von C_{frei}^θ
- Lokal Y -max. Knoten u , darüberl. Knoten u^* ,
- Kanten uu^* und Kanten zwischen adjazenten Knoten



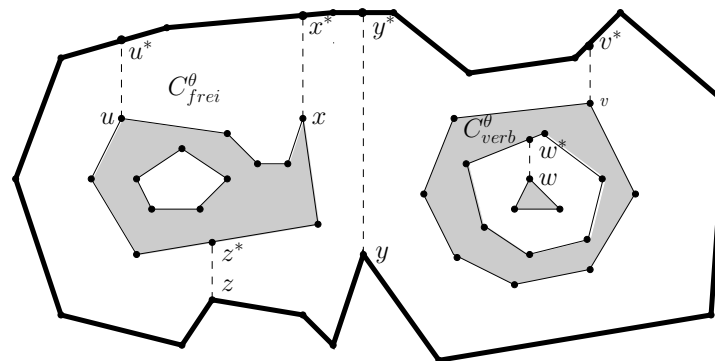
Knotengraph V^θ : Def.:2.39

- Graph, repräsentiert die Struktur von C_{frei}^θ
- Knoten der Polygone von C_{frei}^θ
- Lokal Y -max. Knoten u , darüberl. Knoten u^* ,
- Kanten uu^* und Kanten zwischen adjazenten Knoten
- Beschriftung der Knoten und Kanten nach Entstehung:
 - Konvex: Ecke/Ecke Paar (W_i, S_i)



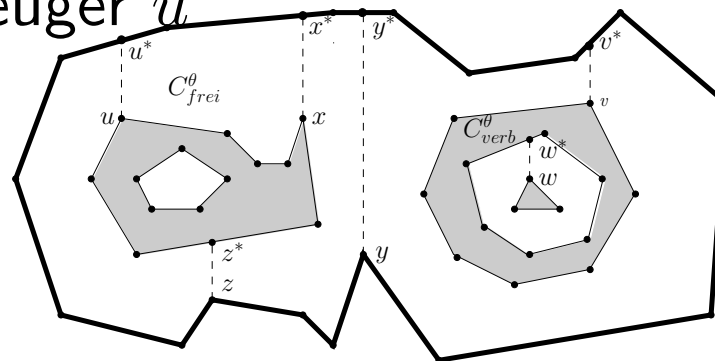
Knotengraph V^θ : Def.:2.39

- Graph, repräsentiert die Struktur von C_{frei}^θ
- Knoten der Polygone von C_{frei}^θ
- Lokal Y -max. Knoten u , darüberl. Knoten u^* ,
- Kanten uu^* und Kanten zwischen adjazenten Knoten
- Beschriftung der Knoten und Kanten nach Entstehung:
 - Konvex: Ecke/Ecke Paar (W_i, S_i)
 - Konkav: Ecke/Kante Paare $(W_i, S_i) (W_j, S_j)$

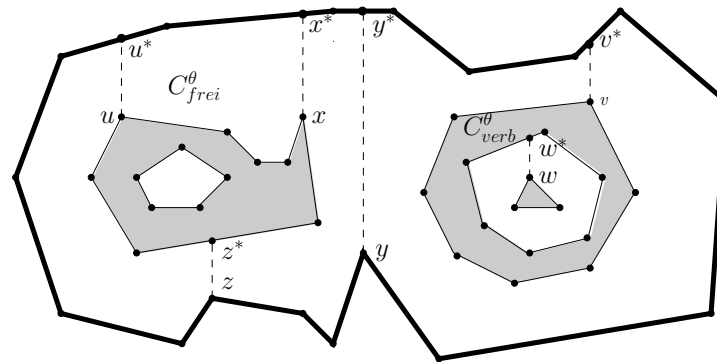


Knotengraph V^θ : Def.:2.39

- Graph, repräsentiert die Struktur von C_{frei}^θ
- Knoten der Polygone von C_{frei}^θ
- Lokal Y -max. Knoten u , darüberl. Knoten u^* ,
- Kanten uu^* und Kanten zwischen adjazenten Knoten
- Beschriftung der Knoten und Kanten nach Entstehung:
 - Konvex: Ecke/Ecke Paar (W_i, S_i)
 - Konkav: Ecke/Kante Paare $(W_i, S_i) (W_j, S_j)$
 - Knoten u^* : Erzeuger u

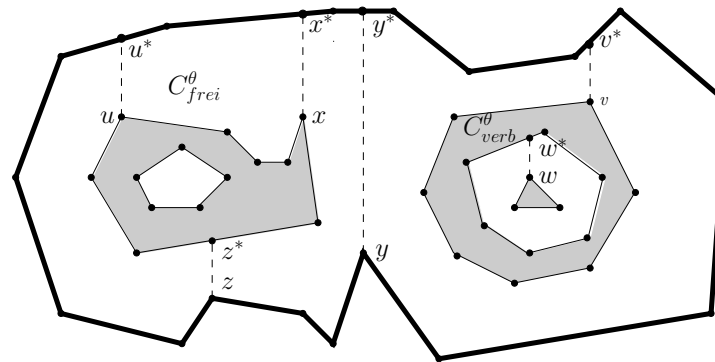


Eigenschaften V^θ : **Bem.:2.40**



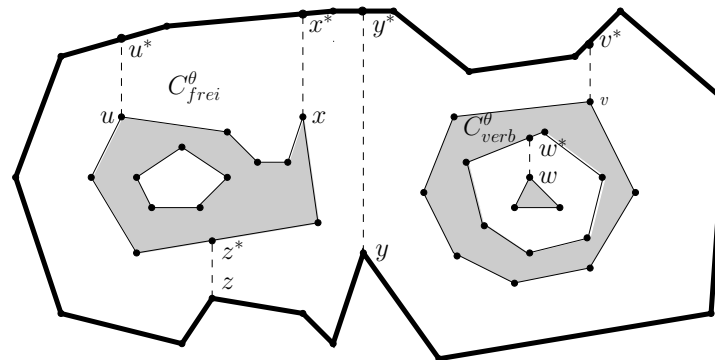
Eigenschaften V^θ : **Bem.:2.40**

i) V^θ planarer Graph mit $O(mn)$ Knoten und Kanten.



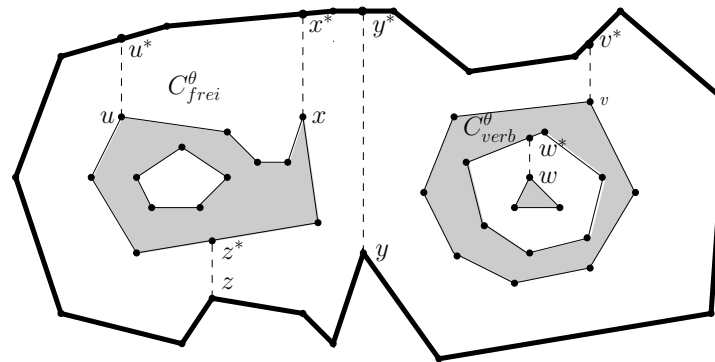
Eigenschaften V^θ : **Bem.:2.40**

- i) V^θ planarer Graph mit $O(mn)$ Knoten und Kanten.
- ii) Jeder Knoten hat Grad ≤ 3 .



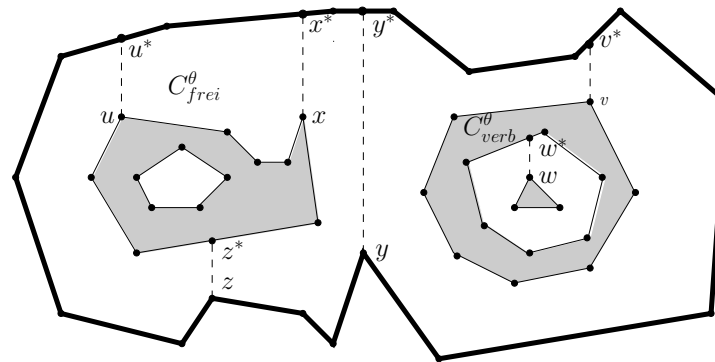
Eigenschaften V^θ : **Bem.:2.40**

- i) V^θ planarer Graph mit $O(mn)$ Knoten und Kanten.
- ii) Jeder Knoten hat Grad ≤ 3 .
- iii) V^θ in Zeit $O(mn \log^2(mn))$ berechnen.

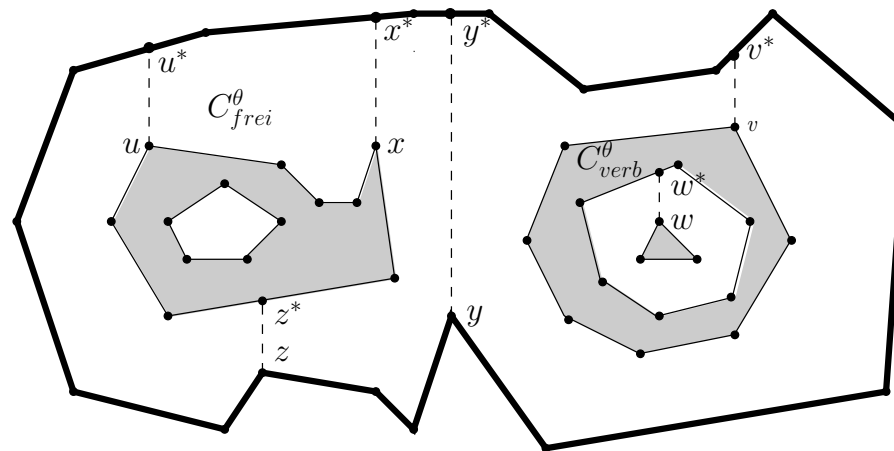


Eigenschaften V^θ : **Bem.:2.40**

- i) V^θ planarer Graph mit $O(mn)$ Knoten und Kanten.
- ii) Jeder Knoten hat Grad ≤ 3 .
- iii) V^θ in Zeit $O(mn \log^2(mn))$ berechnen.
- iv) Zu einer Beschriftung findet man den Knoten/die Kante in Zeit $O(\log(mn))$.

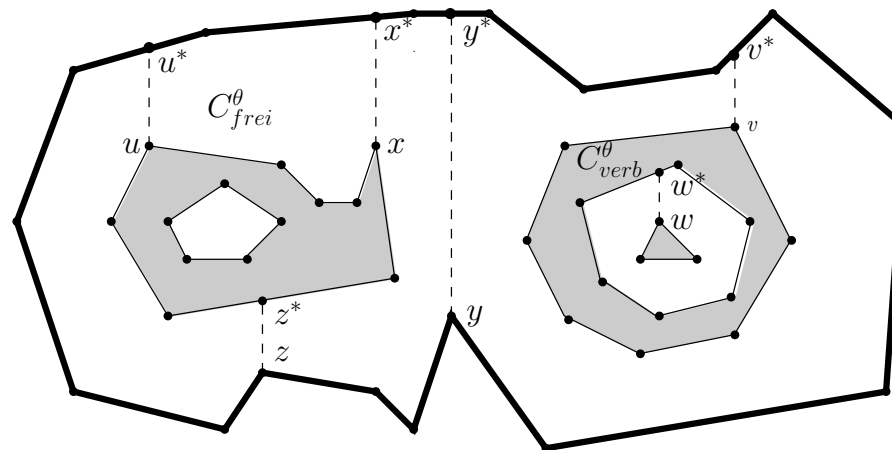


Eigenschaften V^θ : **Lem.:2.41**



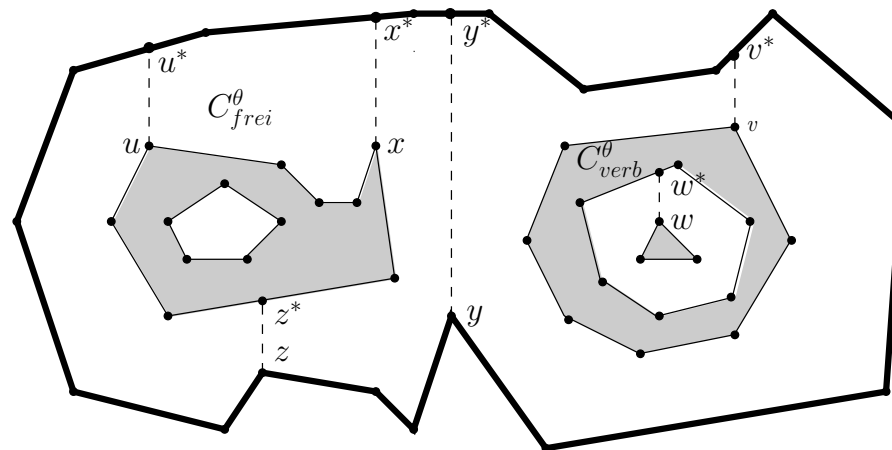
Eigenschaften V^θ : **Lem.:2.41**

- u, v Knoten von V^θ



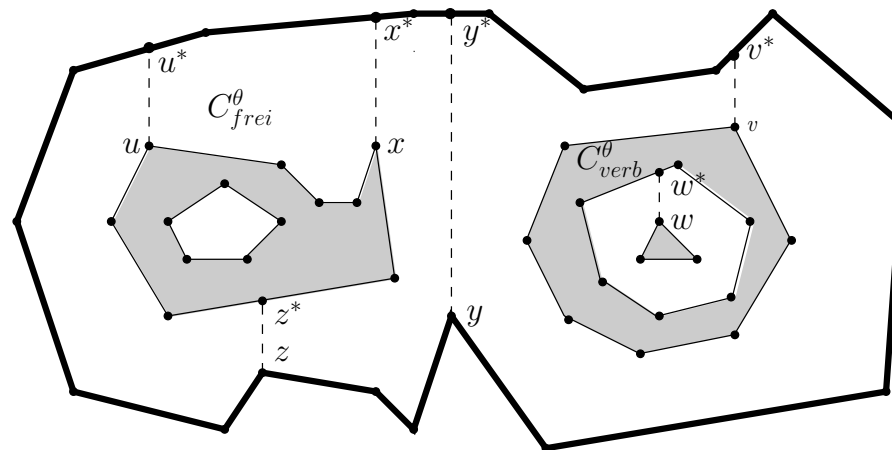
Eigenschaften V^θ : Lem.:2.41

- u, v Knoten von V^θ
- u, v liegen in derselben Zusammenhangskomponente von V^θ
 $\iff u, v$ liegen auf dem Rand derselben
Zusammenhangskomponente von C_{frei}^θ

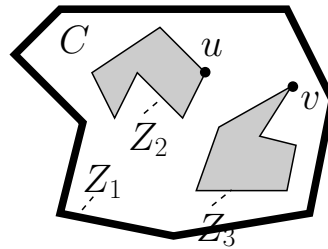


Eigenschaften V^θ : Lem.:2.41

- u, v Knoten von V^θ
- u, v liegen in derselben Zusammenhangskomponente von V^θ
 $\iff u, v$ liegen auf dem Rand derselben
Zusammenhangskomponente von C_{frei}^θ
- Beweis: \implies einfach (Tafel)

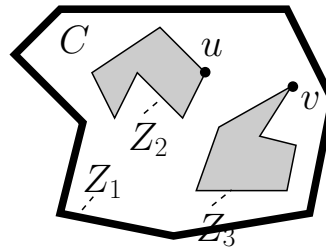


Lem.:2.41: " \Leftarrow "



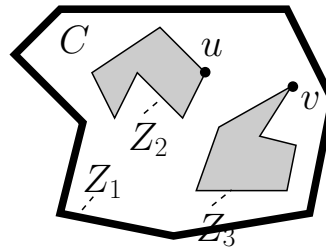
Lem.:2.41: " \Leftarrow "

- u, v liegen auf dem Rand derselben Zusammenhangskomponente von C_{frei}^θ



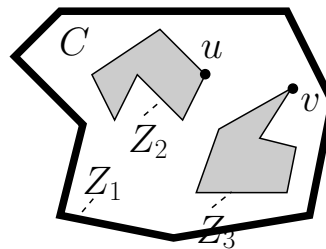
Lem.:2.41: " \Leftarrow "

- u, v liegen auf dem Rand derselben Zusammenhangskomponente von C_{frei}^θ
- Mehrere Komponenten Z_1, Z_2, \dots, Z_i



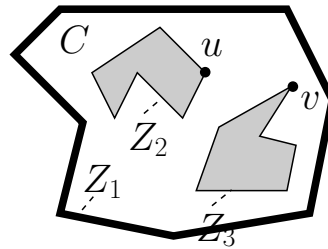
Lem.:2.41: " \Leftarrow "

- u, v liegen auf dem Rand derselben Zusammenhangskomponente von C_{frei}^θ
- Mehrere Komponenten Z_1, Z_2, \dots, Z_i
- u, v auf einem $Z_i \Rightarrow$ fertig



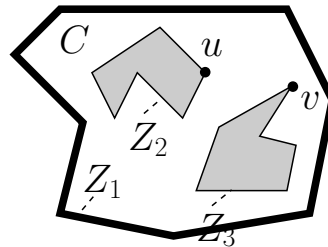
Lem.:2.41: " \Leftarrow "

- u, v liegen auf dem Rand derselben Zusammenhangskomponente von C_{frei}^θ
- Mehrere Komponenten Z_1, Z_2, \dots, Z_i
- u, v auf einem $Z_i \Rightarrow$ fertig
- Sonst: Verbindung u nach v über äußere Komp. Z_1



Lem.:2.41: " \Leftarrow "

- u, v liegen auf dem Rand derselben Zusammenhangskomponente von C_{frei}^θ
- Mehrere Komponenten Z_1, Z_2, \dots, Z_i
- u, v auf einem $Z_i \Rightarrow$ fertig
- Sonst: Verbindung u nach v über äußere Komp. Z_1
- Beweis: V_u^θ (V_v^θ) hat Elemente aus Z_1 (Tafel)



Änderungen von V^θ

Änderungen von V^θ

- Stetige Veränderung des Winkel θ

Änderungen von V^θ

- Stetige Veränderung des Winkel θ
- Strukturelle Veränderung von V^θ

Änderungen von V^θ

- Stetige Veränderung des Winkel θ
- Strukturelle Veränderung von V^θ
- Definition: **Kritische Orientierungen**

Änderungen von V^θ

- Stetige Veränderung des Winkel θ
- Strukturelle Veränderung von V^θ
- Definition: **Kritische Orientierungen**
- Alle Arten systematisch betrachten

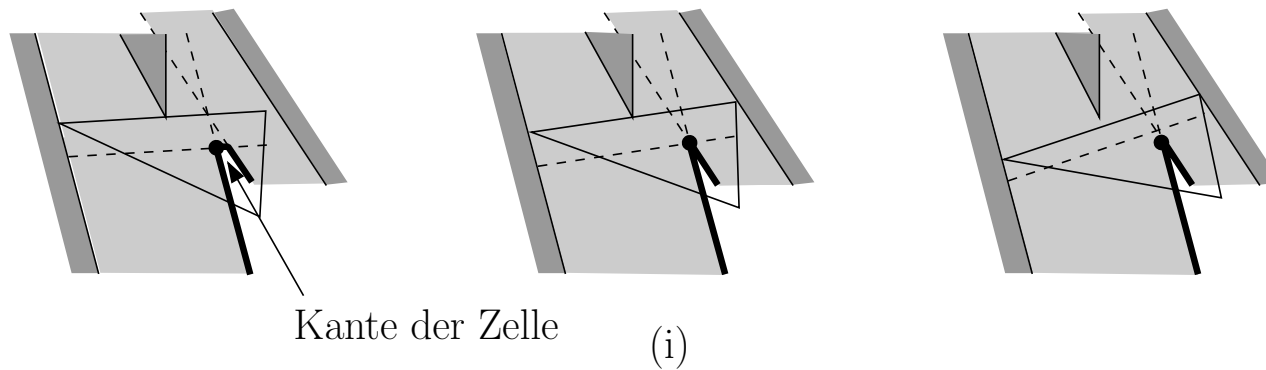
Änderungen von V^θ

- Stetige Veränderung des Winkel θ
- Strukturelle Veränderung von V^θ
- Definition: **Kritische Orientierungen**
- Alle Arten systematisch betrachten
- Insgesamt: $O(mn\lambda_6(mn))$ viele Änderungen von 0 bis 2π

Änderungen von V^θ

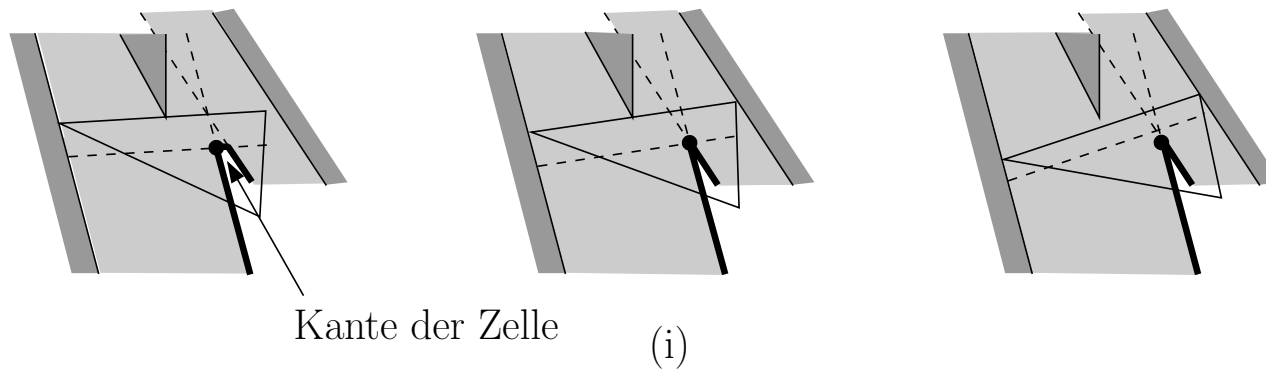
- Stetige Veränderung des Winkel θ
- Strukturelle Veränderung von V^θ
- Definition: **Kritische Orientierungen**
- Alle Arten systematisch betrachten
- Insgesamt: $O(mn\lambda_6(mn))$ viele Änderungen von 0 bis 2π
- In $O(mn\lambda_6(mn) \log mn)$ Durchführen

Kritische Orientierungen i)



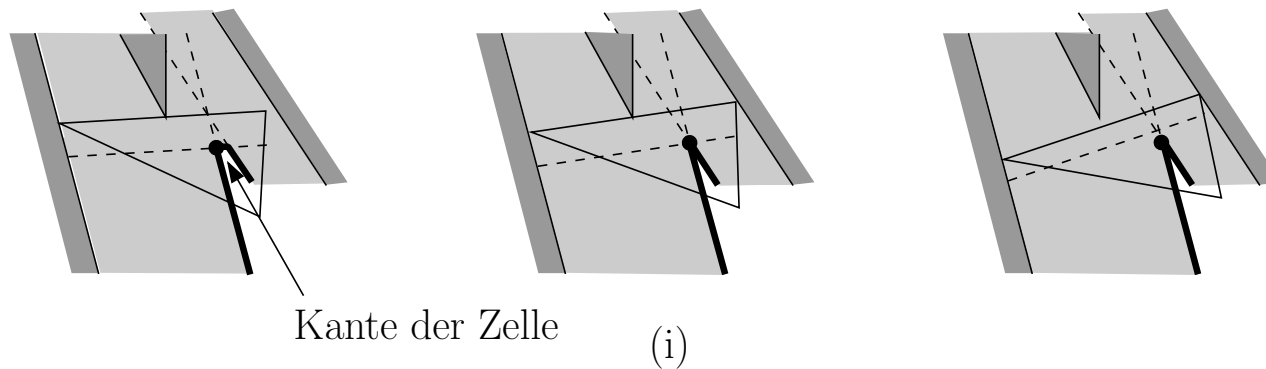
Kritische Orientierungen i)

- Kante von ∂C_{frei} verschwindet beim Übergang



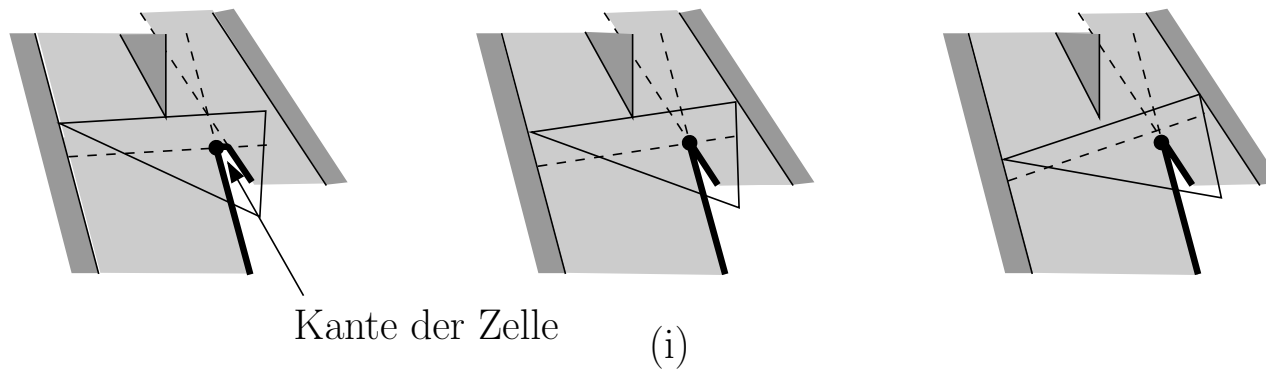
Kritische Orientierungen i)

- Kante von ∂C_{frei} verschwindet beim Übergang
- Drei Ecke/Kante Kontaktpaare

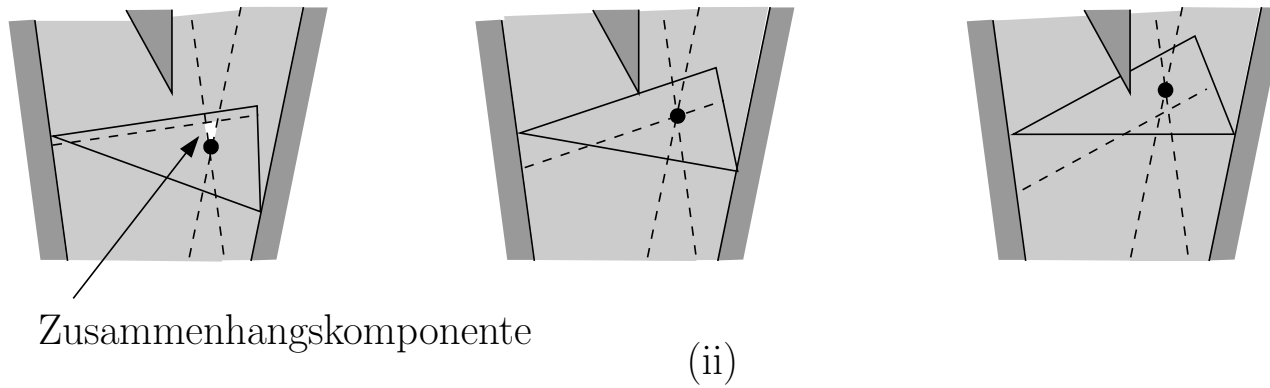


Kritische Orientierungen i)

- Kante von ∂C_{frei} verschwindet beim Übergang
- Drei Ecke/Kante Kontaktpaare
- Kritische Platzierung: $O(mn\lambda_6(mn))$ viele

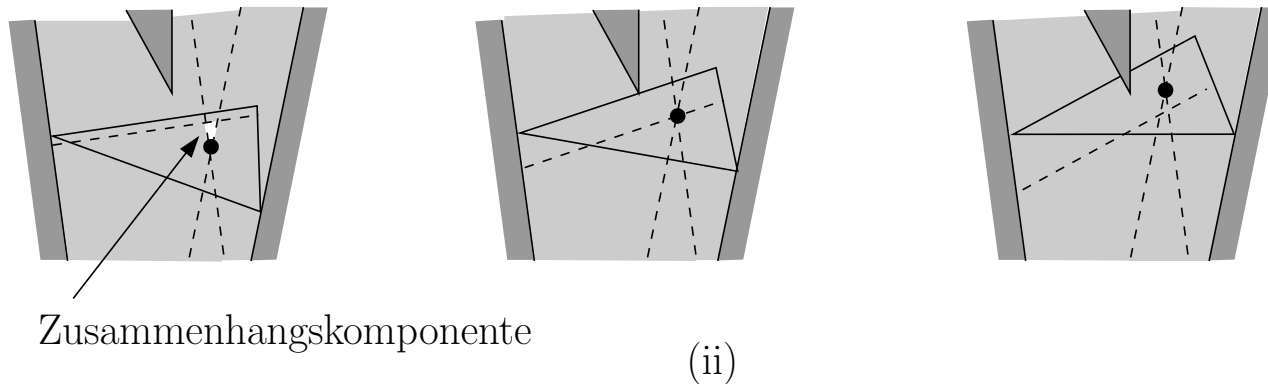


Kritische Orientierungen ii)



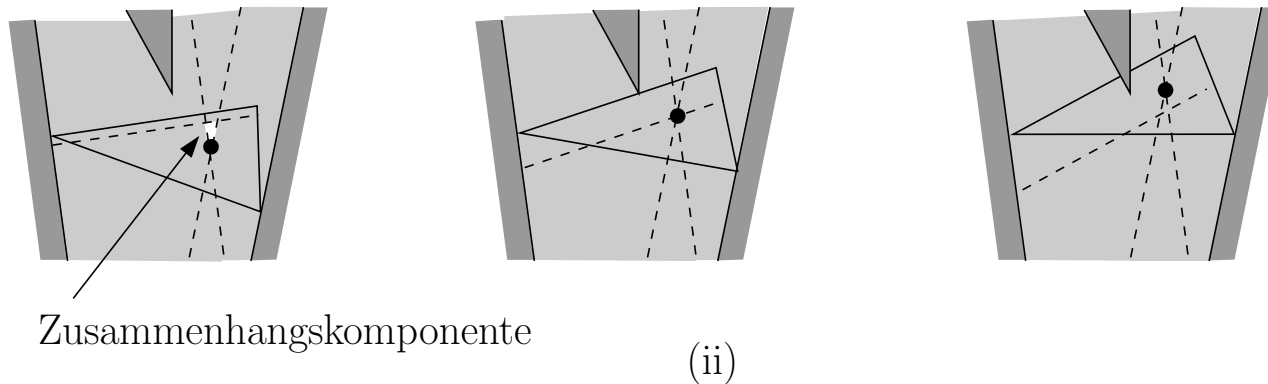
Kritische Orientierungen ii)

- Komponente von C_{frei} verschwindet beim Übergang



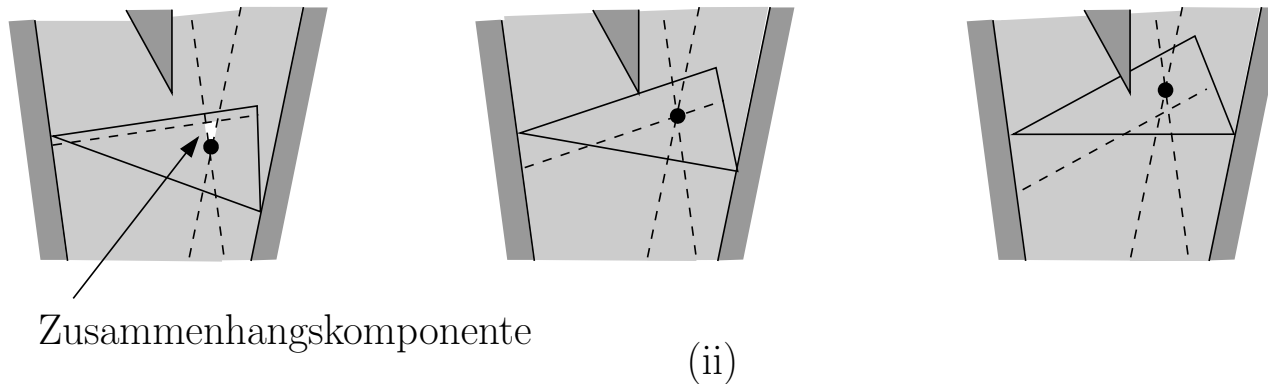
Kritische Orientierungen ii)

- Komponente von C_{frei} verschwindet beim Übergang
- Drei Ecke/Kante Kontaktpaare

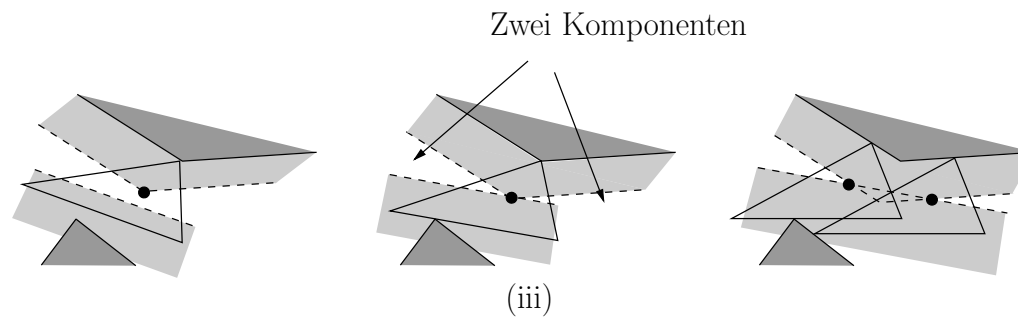


Kritische Orientierungen ii)

- Komponente von C_{frei} verschwindet beim Übergang
- Drei Ecke/Kante Kontaktpaare
- Kritische Platzierung: $O(mn\lambda_6(mn))$ viele

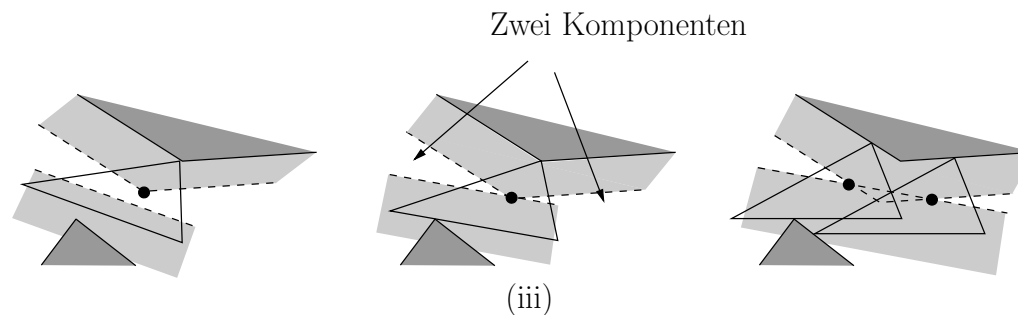


Kritische Orientierungen iii)



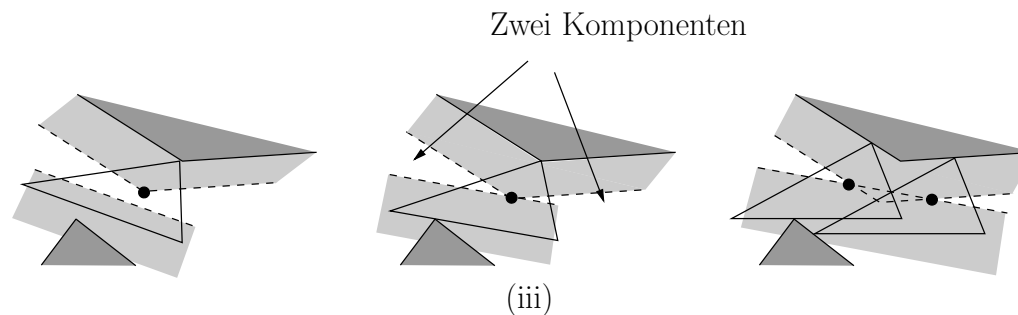
Kritische Orientierungen iii)

- Zusammenhang von C_{frei} verschwindet beim Übergang durch **konvexe Ecke**



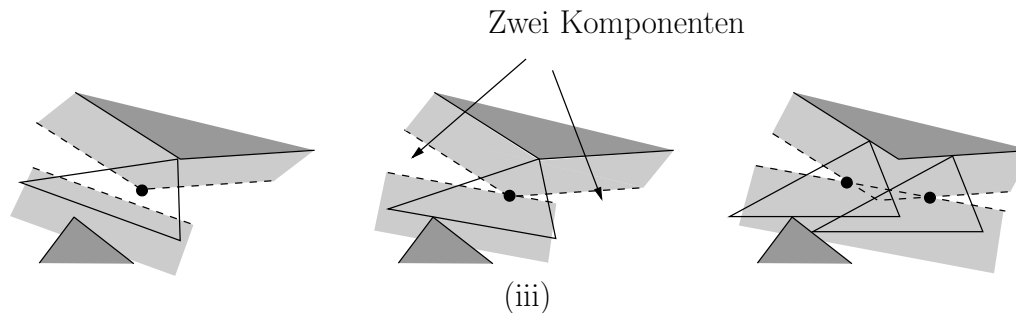
Kritische Orientierungen iii)

- Zusammenhang von C_{frei} verschwindet beim Übergang durch **konvexe Ecke**
- Ein Ecke/Ecke Kontaktpaar, ein Ecke/Kante Kontaktpaar

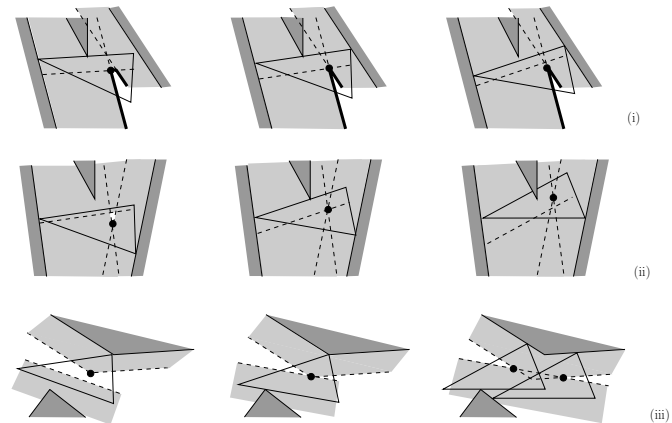


Kritische Orientierungen iii)

- Zusammenhang von C_{frei} verschwindet beim Übergang durch **konvexe Ecke**
- Ein Ecke/Ecke Kontaktpaar, ein Ecke/Kante Kontaktpaar
- Kritische Platzierung: $O(mn\lambda_6(mn))$ viele (Übungsaufgabe!!)

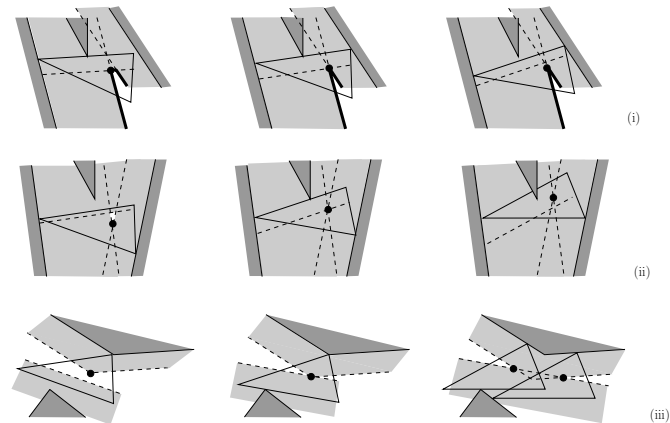


Kritische Orientierungen i)-iii)



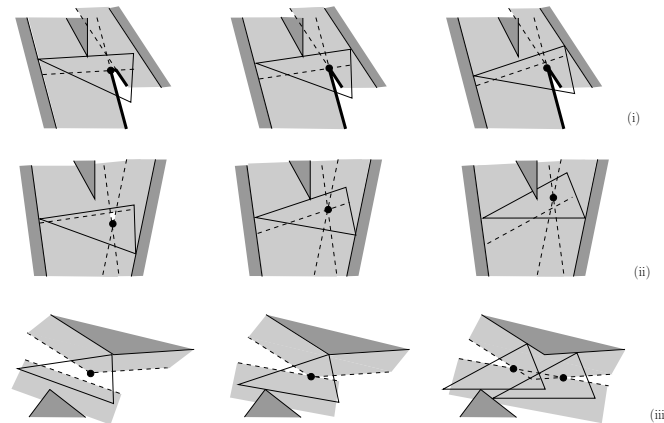
Kritische Orientierungen i)-iii)

- Kritische Platzierungen



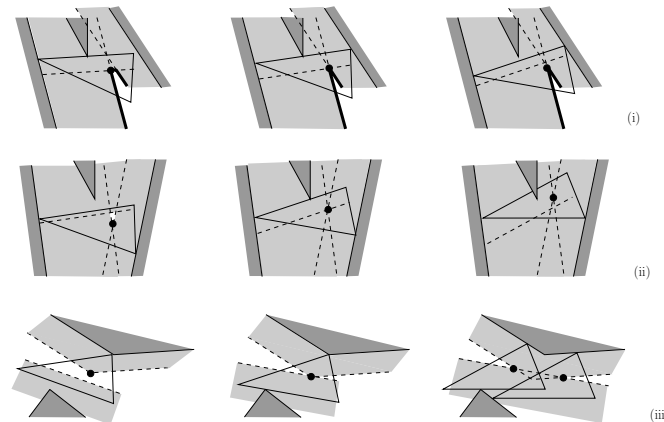
Kritische Orientierungen i)-iii)

- Kritische Platzierungen
- $O(mn\lambda_6(mn))$ viele (Kandidaten)



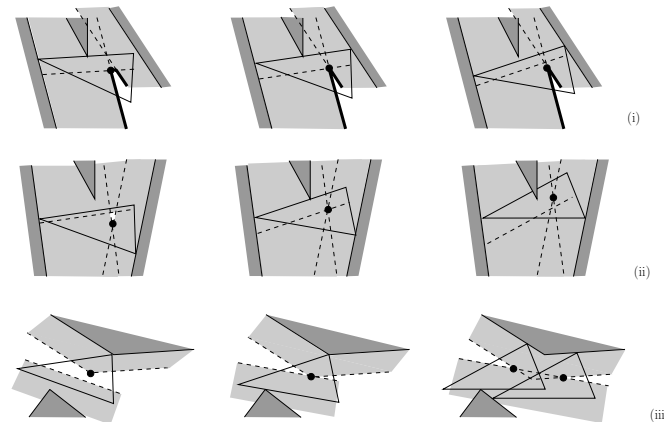
Kritische Orientierungen i)-iii)

- Kritische Platzierungen
- $O(mn\lambda_6(mn))$ viele (Kandidaten)
- Aufwand Aktualisierung von V^θ : jeweils $O(\log mn)$



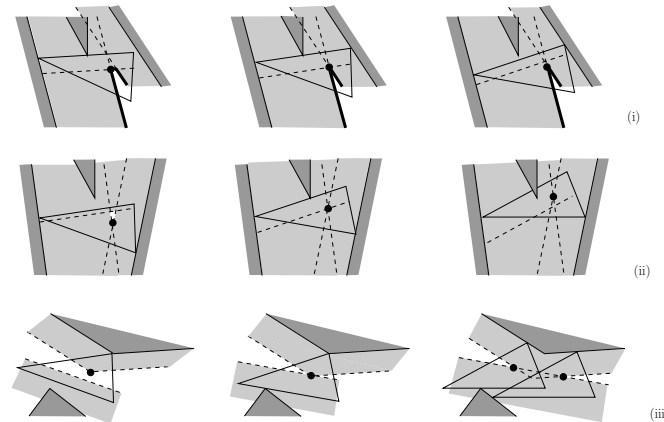
Kritische Orientierungen i)-iii)

- Kritische Platzierungen
- $O(mn\lambda_6(mn))$ viele (Kandidaten)
- Aufwand Aktualisierung von V^θ : jeweils $O(\log mn)$
- Komplexität V^θ : $O(mn)$



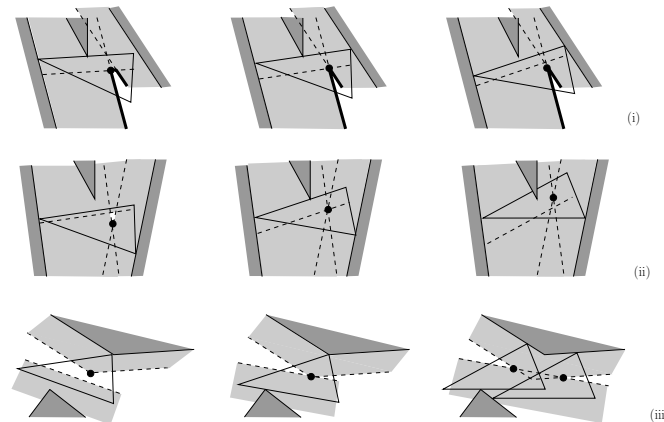
Kritische Orientierungen i)-iii)

- Kritische Platzierungen
- $O(mn\lambda_6(mn))$ viele (Kandidaten)
- Aufwand Aktualisierung von V^θ : jeweils $O(\log mn)$
- Komplexität V^θ : $O(mn)$
- Über Benennung darauf zugreifen



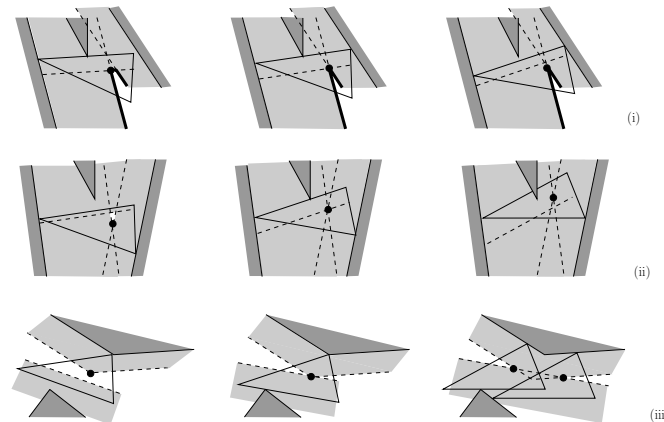
Kritische Orientierungen i)-iii)

- Kritische Platzierungen
- $O(mn\lambda_6(mn))$ viele (Kandidaten)
- Aufwand Aktualisierung von V^θ : jeweils $O(\log mn)$
- Komplexität V^θ : $O(mn)$
- Über Benamung darauf zugreifen
- Kandidaten T^+ : $O(mn\lambda_6(mn) \log(mn))$ berechn. und sort.

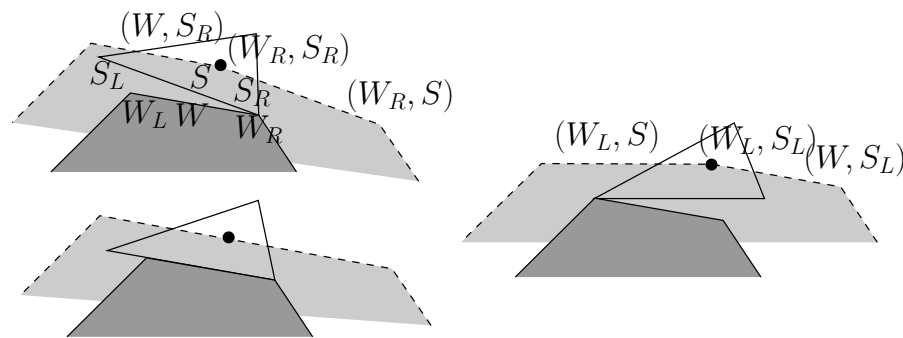


Kritische Orientierungen i)-iii)

- Kritische Platzierungen
- $O(mn\lambda_6(mn))$ viele (Kandidaten)
- Aufwand Aktualisierung von V^θ : jeweils $O(\log mn)$
- Komplexität V^θ : $O(mn)$
- Über Benennung darauf zugreifen
- Kandidaten T^+ : $O(mn\lambda_6(mn) \log(mn))$ berechn. und sort.
- Leider evtl. nicht alle korrekt

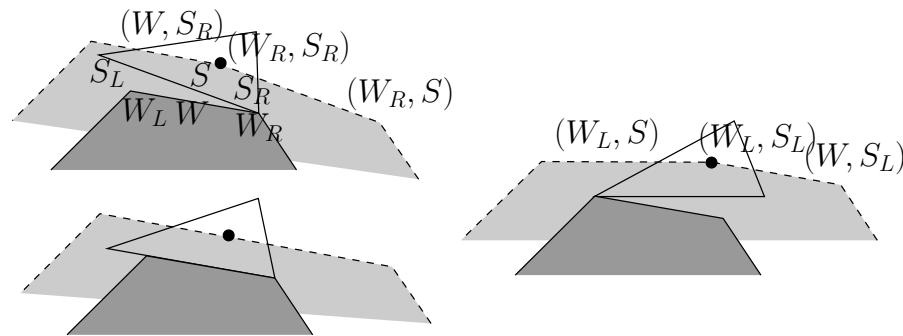


Kritische Orientierungen iv)



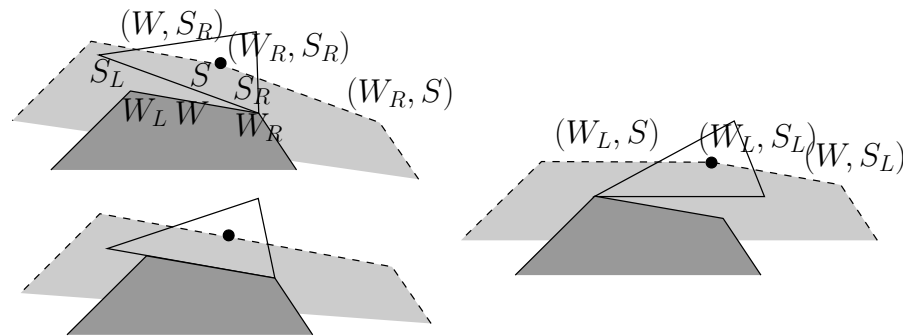
Kritische Orientierungen iv)

- Knoten und Kanten von ∂C_{frei} wechselt Beschriftung beim Übergang,



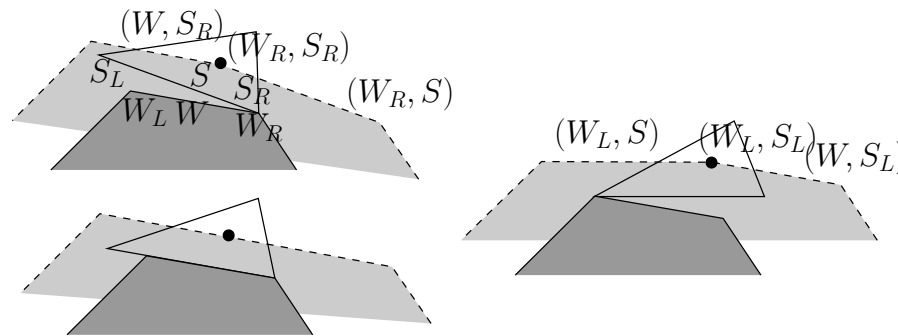
Kritische Orientierungen iv)

- Knoten und Kanten von ∂C_{frei} wechselt Beschriftung beim Übergang, zwei benachbarte Kanten werden kollinear



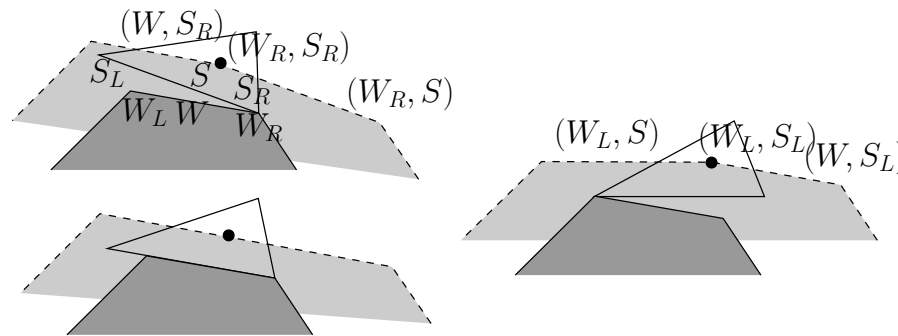
Kritische Orientierungen iv)

- Knoten und Kanten von ∂C_{frei} wechselt Beschriftung beim Übergang, zwei benachbarte Kanten werden kollinear
- Ecke/Ecke Kontaktpaar und angrenzendes Ecke/Kante Kontaktpaar



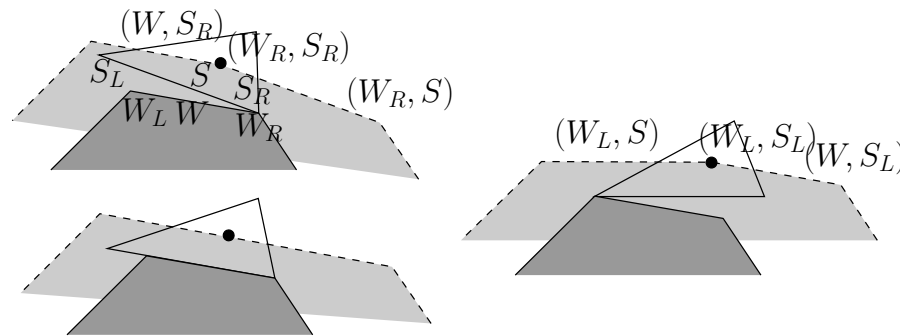
Kritische Orientierungen iv)

- Knoten und Kanten von ∂C_{frei} wechselt Beschriftung beim Übergang, zwei benachbarte Kanten werden kollinear
- Ecke/Ecke Kontaktpaar und angrenzendes Ecke/Kante Kontaktpaar
- Kante von R und Kante von P_i parallel

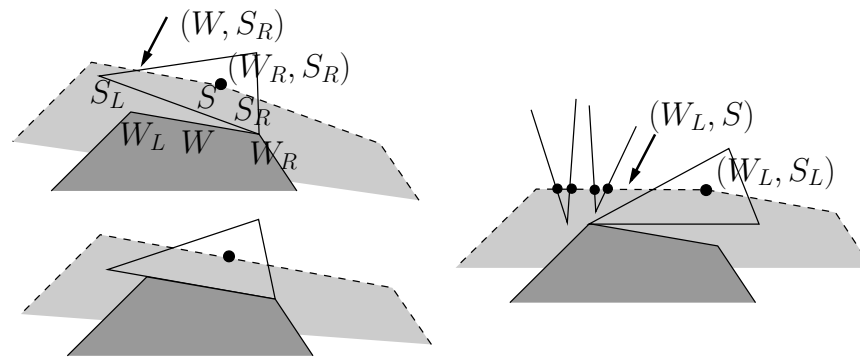


Kritische Orientierungen iv)

- Knoten und Kanten von ∂C_{frei} wechselt Beschriftung beim Übergang, zwei benachbarte Kanten werden kollinear
- Ecke/Ecke Kontaktpaar und angrenzendes Ecke/Kante Kontaktpaar
- Kante von R und Kante von P_i parallel
- $O(mn)$ mal kann das vorkommen

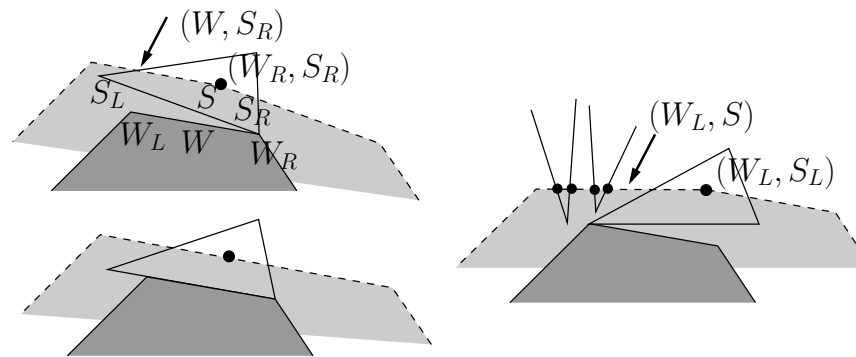


Kritische Orientierungen iv)



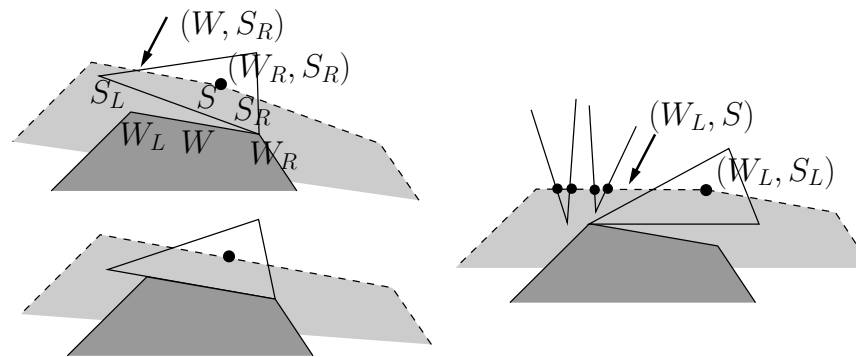
Kritische Orientierungen iv)

- Aktualisierung der Beschriftung: Von (W_R, S_R) nach (W_L, S_L)



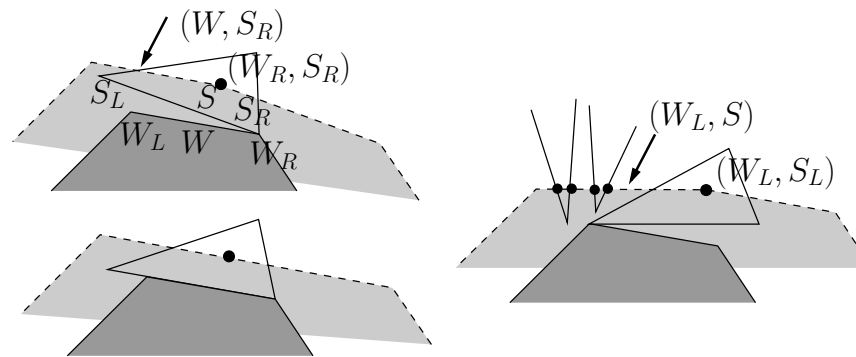
Kritische Orientierungen iv)

- Aktualisierung der Beschriftung: Von (W_R, S_R) nach (W_L, S_L)
- Bis zu $O(mn)$ Knoten in V^θ sind mit (W_L, S) entstanden



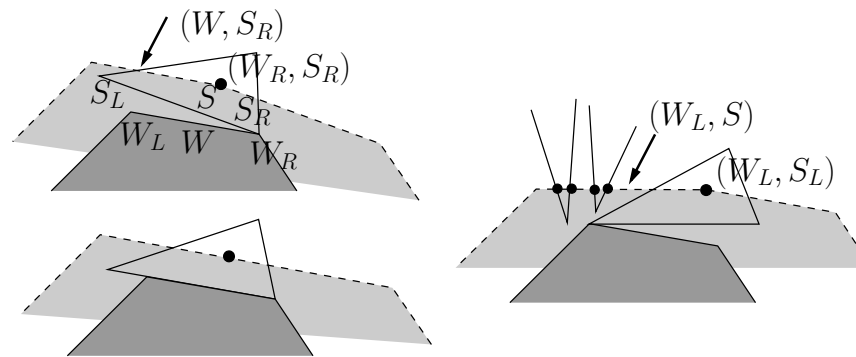
Kritische Orientierungen iv)

- Aktualisierung der Beschriftung: Von (W_R, S_R) nach (W_L, S_L)
- Bis zu $O(mn)$ Knoten in V^θ sind mit (W_L, S) entstanden
- Konkave Ecken mit zwei Kontakten



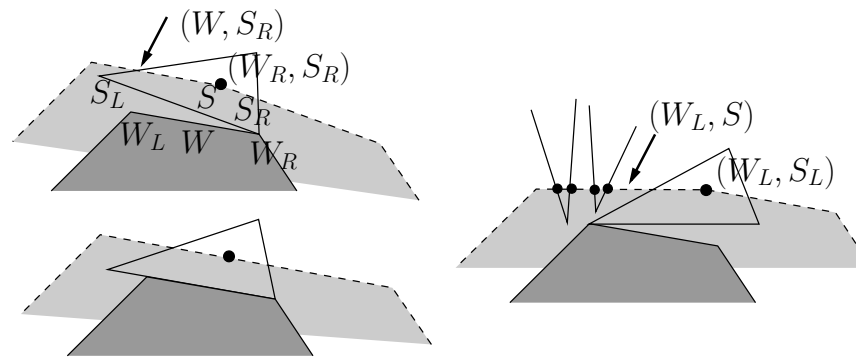
Kritische Orientierungen iv)

- Aktualisierung der Beschriftung: Von (W_R, S_R) nach (W_L, S_L)
- Bis zu $O(mn)$ Knoten in V^θ sind mit (W_L, S) entstanden
- Konkave Ecken mit zwei Kontakten
- Jeweils $O(\log mn)$ für Aktualisierung

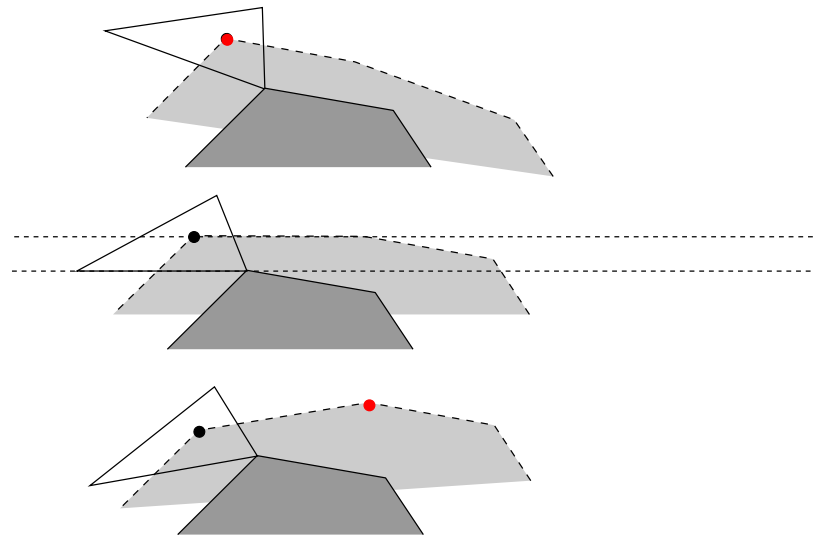


Kritische Orientierungen iv)

- Aktualisierung der Beschriftung: Von (W_R, S_R) nach (W_L, S_L)
- Bis zu $O(mn)$ Knoten in V^θ sind mit (W_L, S) entstanden
- Konkave Ecken mit zwei Kontakten
- Jeweils $O(\log mn)$ für Aktualisierung
- $O(mn)$ mal kann das vorkommen: $O((mn)^2 \log mn)$

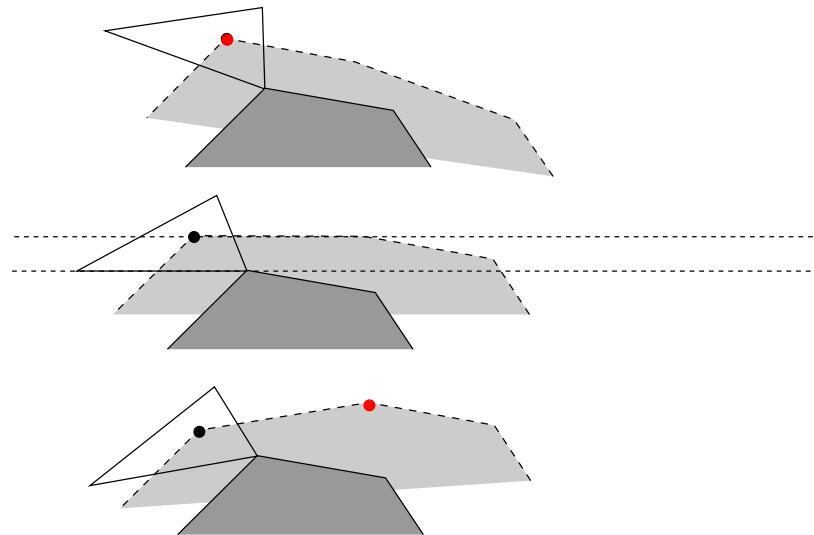


Kritische Orientierungen v)



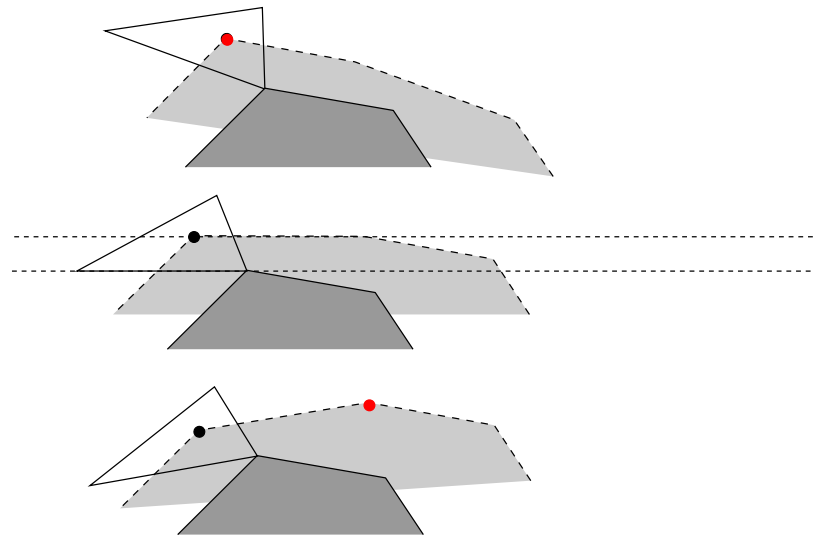
Kritische Orientierungen v)

- Lokales Y Maximum ändert sich

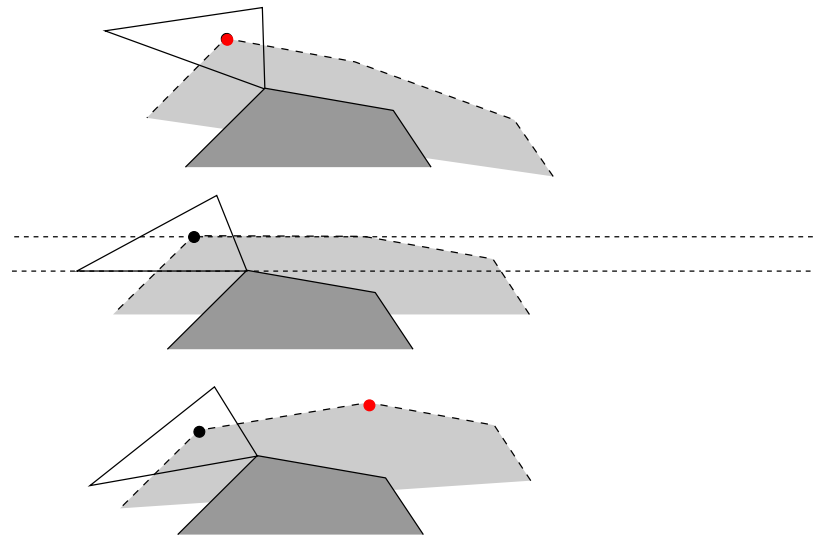


Kritische Orientierungen v)

- Lokales Y Maximum ändert sich
- Ecke/Kante Kontaktpaar und waagerechte Kante in C_{frei}

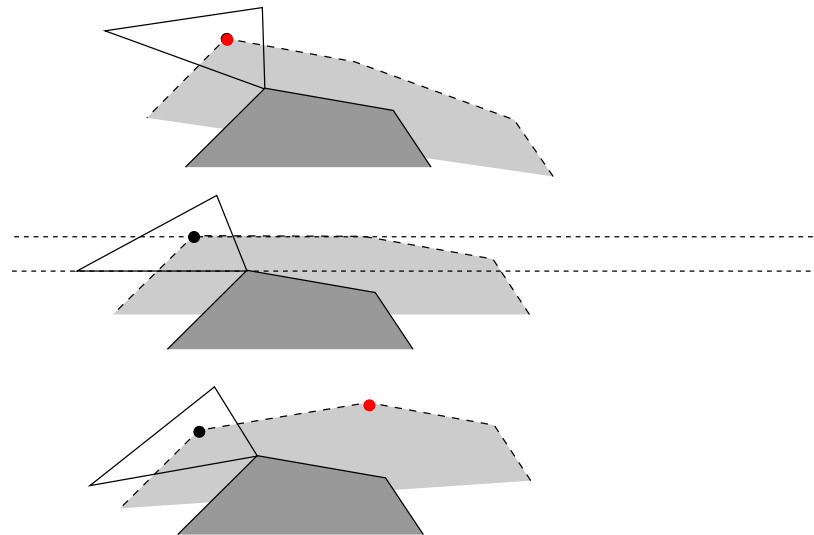


Kritische Orientierungen v)



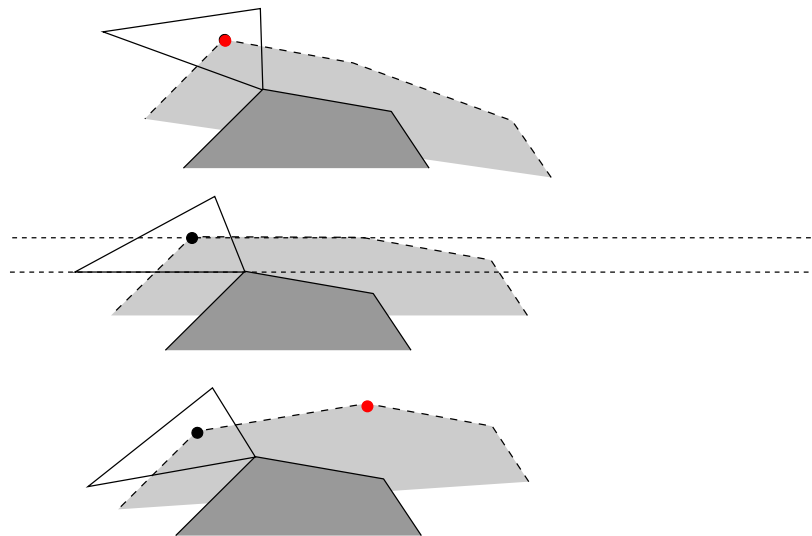
Kritische Orientierungen v)

- Für jede Kante von R kann das passieren: m Orient.



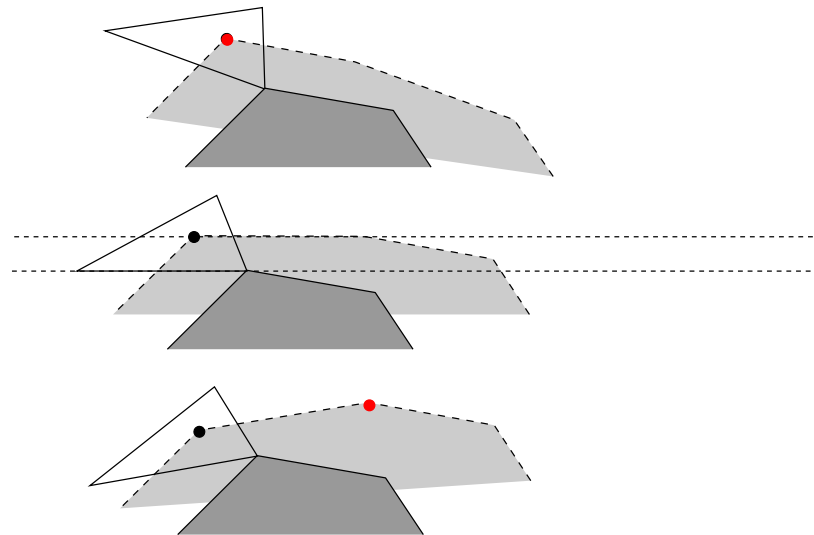
Kritische Orientierungen v)

- Für jede Kante von R kann das passieren: m Orient.
- Für jeden Knoten aller P_i Änderung möglich



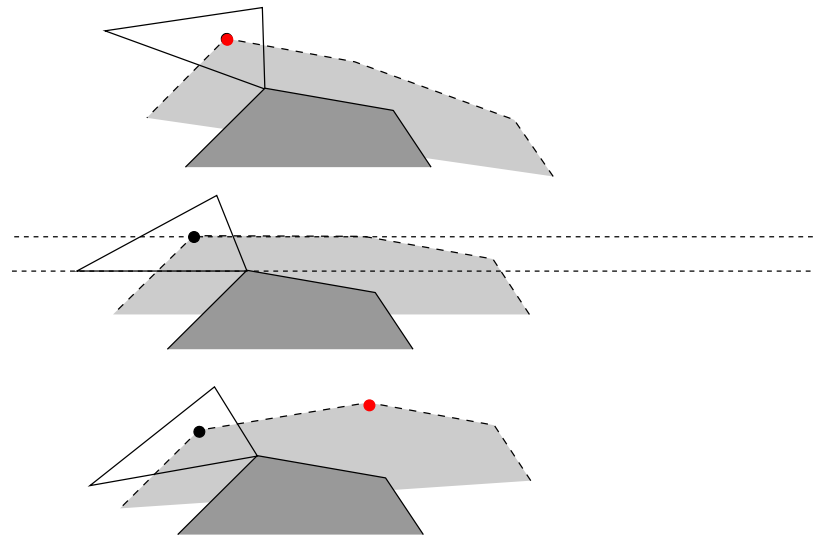
Kritische Orientierungen v)

- Für jede Kante von R kann das passieren: m Orient.
- Für jeden Knoten aller P_i Änderung möglich
- Knoten u, u^* löschen



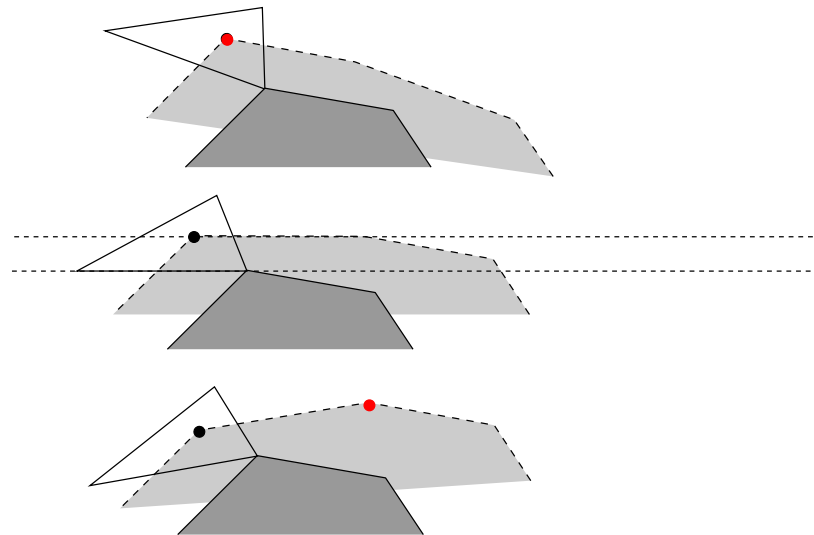
Kritische Orientierungen v)

- Für jede Kante von R kann das passieren: m Orient.
- Für jeden Knoten aller P_i Änderung möglich
- Knoten u, u^* löschen , Knoten v, v^* einfügen



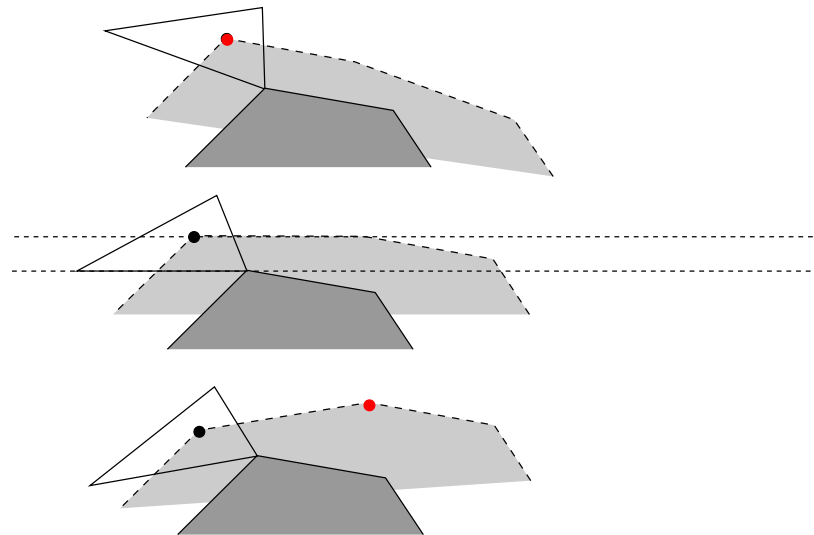
Kritische Orientierungen v)

- Für jede Kante von R kann das passieren: m Orient.
- Für jeden Knoten aller P_i Änderung möglich
- Knoten u, u^* löschen, Knoten v, v^* einfügen
- Ein voller Sweep über V^θ in $O(mn \log mn)$

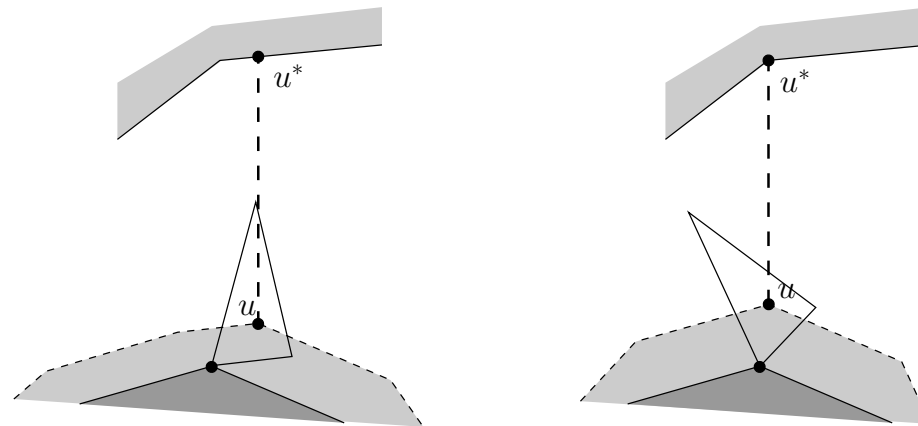


Kritische Orientierungen v)

- Für jede Kante von R kann das passieren: m Orient.
- Für jeden Knoten aller P_i Änderung möglich
- Knoten u, u^* löschen, Knoten v, v^* einfügen
- Ein voller Sweep über V^θ in $O(mn \log mn)$
- Bei m Orientierungen: $O(m^2 n \log mn)$

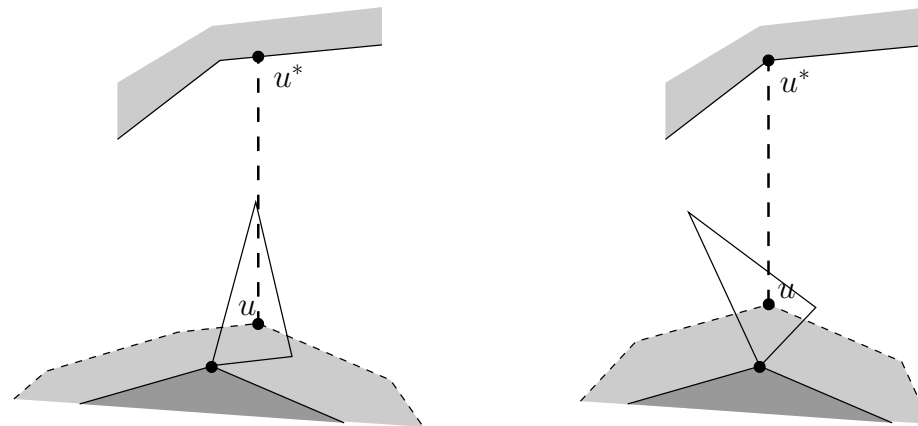


Kritische Orientierungen vi)



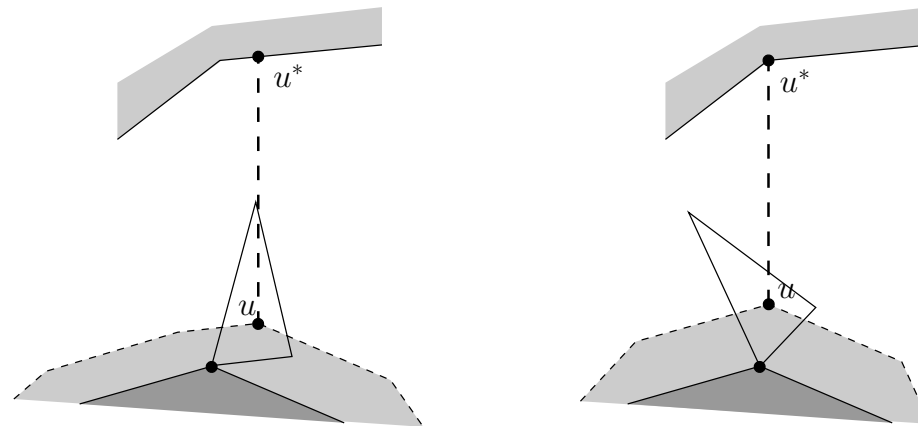
Kritische Orientierungen vi)

- Wechsel einer Ecke u^*



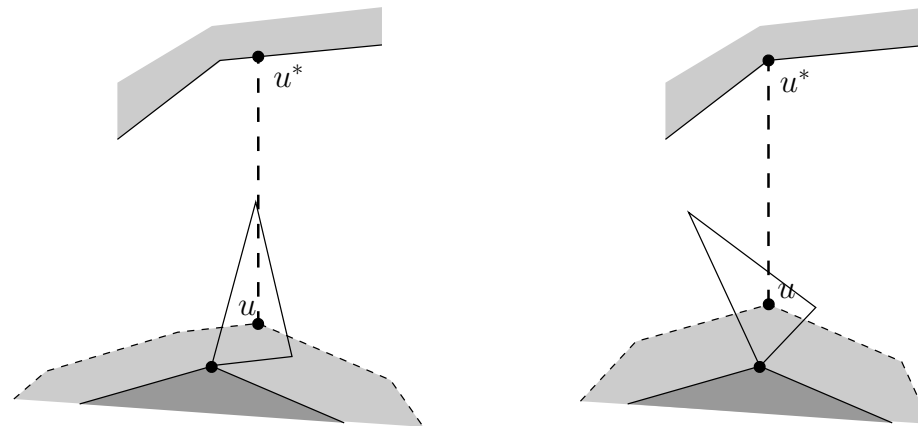
Kritische Orientierungen vi)

- Wechsel einer Ecke u^*
- Ecke/Ecke Kontaktpaar erzeugt konvexen Knoten



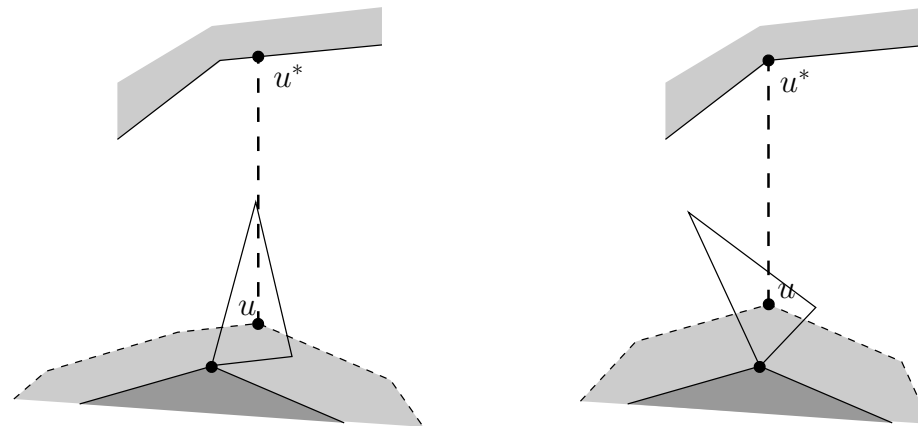
Kritische Orientierungen vi)

- Wechsel einer Ecke u^*
- Ecke/Ecke Kontaktpaar erzeugt konvexen Knoten
- Aktualisierung/neue Beschriftung: $O(\log mn)$



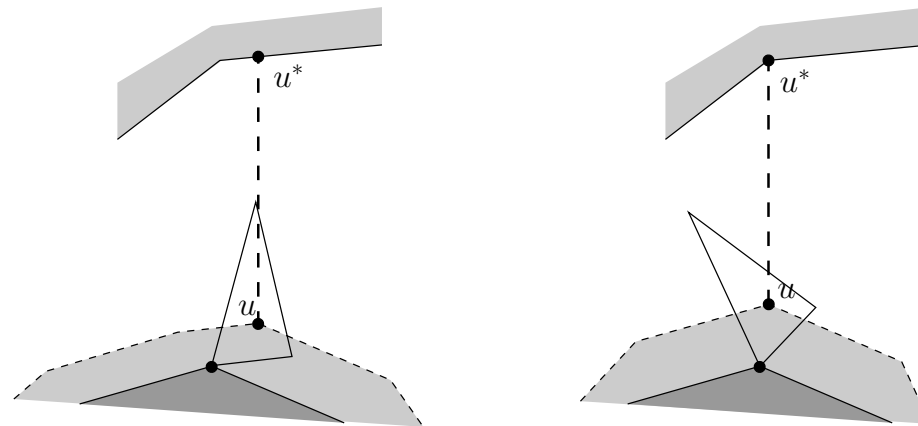
Kritische Orientierungen vi)

- Wechsel einer Ecke u^*
- Ecke/Ecke Kontaktpaar erzeugt konvexen Knoten
- Aktualisierung/neue Beschriftung: $O(\log mn)$
- Vorkommen: $O(mn\lambda_6(mn))$,



Kritische Orientierungen vi)

- Wechsel einer Ecke u^*
- Ecke/Ecke Kontaktpaar erzeugt konvexen Knoten
- Aktualisierung/neue Beschriftung: $O(\log mn)$
- Vorkommen: $O(mn\lambda_6(mn))$, Technik wie Krit.Platz



Kritische Orientierungen i)-vi)

Kritische Orientierungen i)-vi)

- Insgesamt nicht mehr als $O(mn\lambda_6(mn))$ Kandidaten

Kritische Orientierungen i)-vi)

- Insgesamt nicht mehr als $O(mn\lambda_6(mn))$ Kandidaten
- Alle Aktualisierungen in $O(mn\lambda_6(mn) \log mn)$

Kritische Orientierungen i)-vi)

- Insgesamt nicht mehr als $O(mn\lambda_6(mn))$ Kandidaten
- Alle Aktualisierungen in $O(mn\lambda_6(mn) \log mn)$
- Kandidaten für i)-iv) in $O(mn\lambda_6(mn) \log mn)$ berechnen

Kritische Orientierungen i)-vi)

- Insgesamt nicht mehr als $O(mn\lambda_6(mn))$ Kandidaten
- Alle Aktualisierungen in $O(mn\lambda_6(mn) \log mn)$
- Kandidaten für i)-iv) in $O(mn\lambda_6(mn) \log mn)$ berechnen
- Kandidaten für i) und ii): Alg. 2.8

Kritische Orientierungen i)-vi)

- Insgesamt nicht mehr als $O(mn\lambda_6(mn))$ Kandidaten
- Alle Aktualisierungen in $O(mn\lambda_6(mn) \log mn)$
- Kandidaten für i)-iv) in $O(mn\lambda_6(mn) \log mn)$ berechnen
- Kandidaten für i) und ii): Alg. 2.8
- iii) und iv) Übungsaufgabe/Alg.2.9

Kritische Orientierungen i)-vi)

- Insgesamt nicht mehr als $O(mn\lambda_6(mn))$ Kandidaten
- Alle Aktualisierungen in $O(mn\lambda_6(mn) \log mn)$
- Kandidaten für i)-iv) in $O(mn\lambda_6(mn) \log mn)$ berechnen
- Kandidaten für i) und ii): Alg. 2.8
- iii) und iv) Übungsaufgabe/Alg.2.9
- Kandidaten für v)-vi): auch in $O(mn\lambda_6(mn) \log mn)$ berechnen

Kritische Orientierungen i)-vi)

- Insgesamt nicht mehr als $O(mn\lambda_6(mn))$ Kandidaten
- Alle Aktualisierungen in $O(mn\lambda_6(mn) \log mn)$
- Kandidaten für i)-iv) in $O(mn\lambda_6(mn) \log mn)$ berechnen
- Kandidaten für i) und ii): Alg. 2.8
- iii) und iv) Übungsaufgabe/Alg.2.9
- Kandidaten für v)-vi): auch in $O(mn\lambda_6(mn) \log mn)$ berechnen
- Alle Kandidaten in $O(mn\lambda_6(mn) \log mn)$ berechnen

Kritische Orientierungen i)-vi)

- Insgesamt nicht mehr als $O(mn\lambda_6(mn))$ Kandidaten
- Alle Aktualisierungen in $O(mn\lambda_6(mn) \log mn)$
- Kandidaten für i)-iv) in $O(mn\lambda_6(mn) \log mn)$ berechnen
- Kandidaten für i) und ii): Alg. 2.8
- iii) und iv) Übungsaufgabe/Alg.2.9
- Kandidaten für v)-vi): auch in $O(mn\lambda_6(mn) \log mn)$ berechnen
- Alle Kandidaten in $O(mn\lambda_6(mn) \log mn)$ berechnen
- **Alle Kandidaten in $O(mn\lambda_6(mn) \log mn)$ bearbeiten**

Kritische Orientierungen i)-vi)

- Insgesamt nicht mehr als $O(mn\lambda_6(mn))$ Kandidaten
- Alle Aktualisierungen in $O(mn\lambda_6(mn) \log mn)$
- Kandidaten für i)-iv) in $O(mn\lambda_6(mn) \log mn)$ berechnen
- Kandidaten für i) und ii): Alg. 2.8
- iii) und iv) Übungsaufgabe/Alg.2.9
- Kandidaten für v)-vi): auch in $O(mn\lambda_6(mn) \log mn)$ berechnen
- Alle Kandidaten in $O(mn\lambda_6(mn) \log mn)$ berechnen
- **Alle Kandidaten in $O(mn\lambda_6(mn) \log mn)$ bearbeiten**
- Alle Kandidaten in Winkel-Reihenfolge bearbeiten!

Kritische Orientierungen i)-vi)

- Insgesamt nicht mehr als $O(mn\lambda_6(mn))$ Kandidaten
- Alle Aktualisierungen in $O(mn\lambda_6(mn) \log mn)$
- Kandidaten für i)-iv) in $O(mn\lambda_6(mn) \log mn)$ berechnen
- Kandidaten für i) und ii): Alg. 2.8
- iii) und iv) Übungsaufgabe/Alg.2.9
- Kandidaten für v)-vi): auch in $O(mn\lambda_6(mn) \log mn)$ berechnen
- Alle Kandidaten in $O(mn\lambda_6(mn) \log mn)$ berechnen
- **Alle Kandidaten in $O(mn\lambda_6(mn) \log mn)$ bearbeiten**
- Alle Kandidaten in Winkel-Reihenfolge bearbeiten!
- Problem: Sind die auch tatsächlich bereits frei?