Offline Bewegungsplanung: TPP und Wege in 3D

Elmar Langetepe
University of Bonn

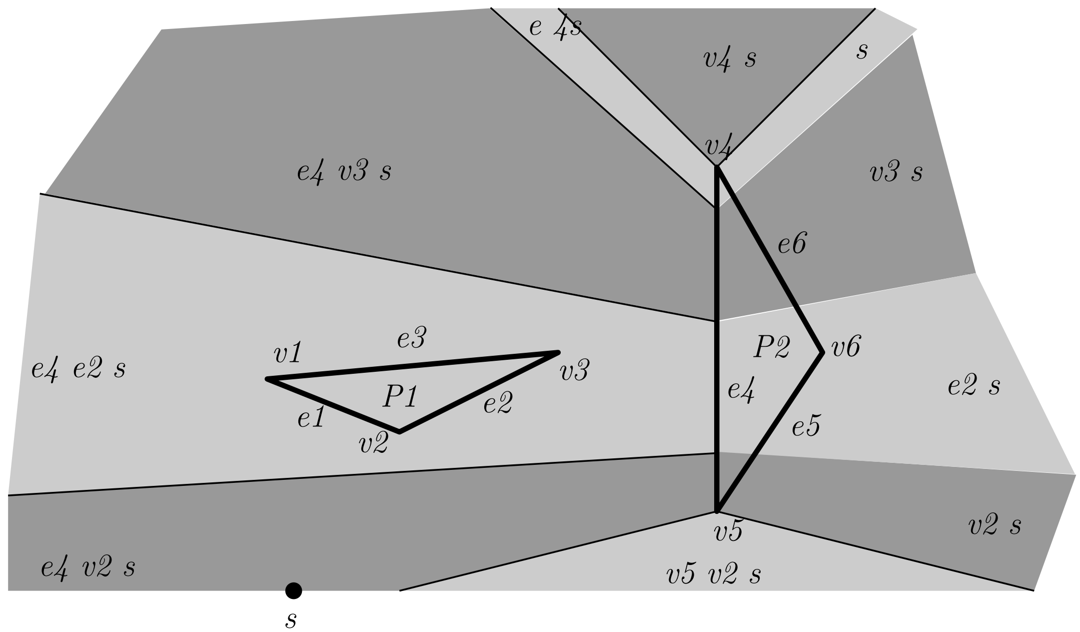
Last step shortest path map

Last step shortest path map

- Der letzte Schritt des Kürzesten Weges

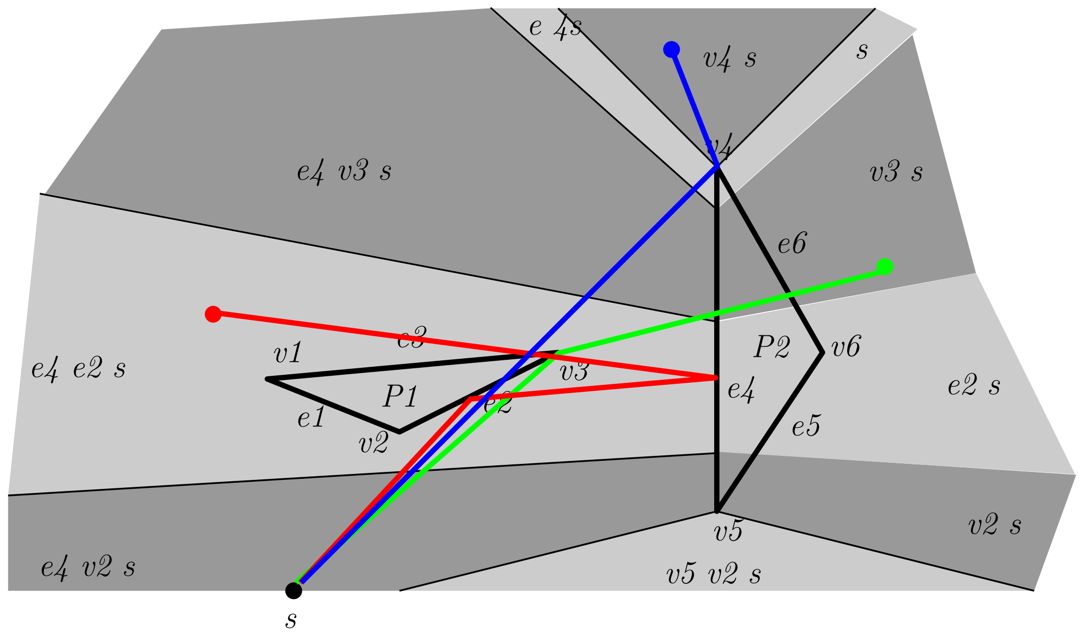
Last step shortest path map

- Der letzte Schritt des Kürzesten Weges



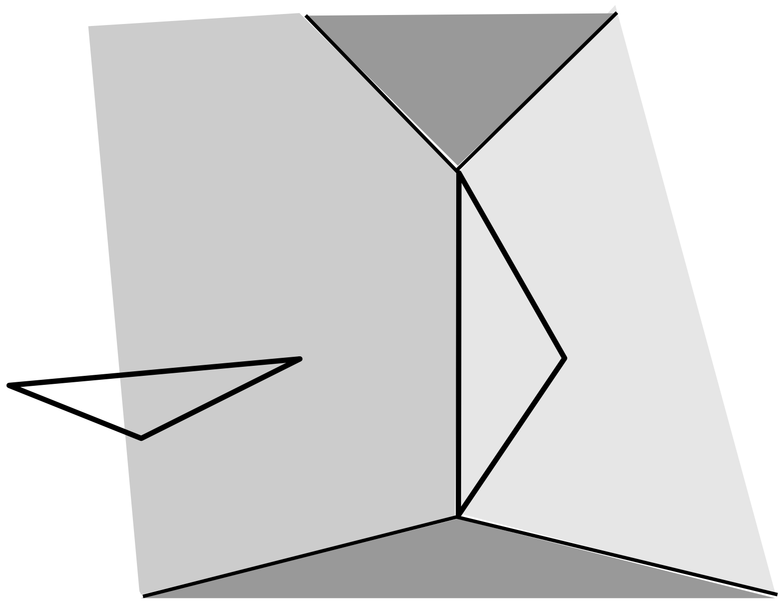
Last step shortest path map

- Der letzte Schritt des Kürzesten Weges



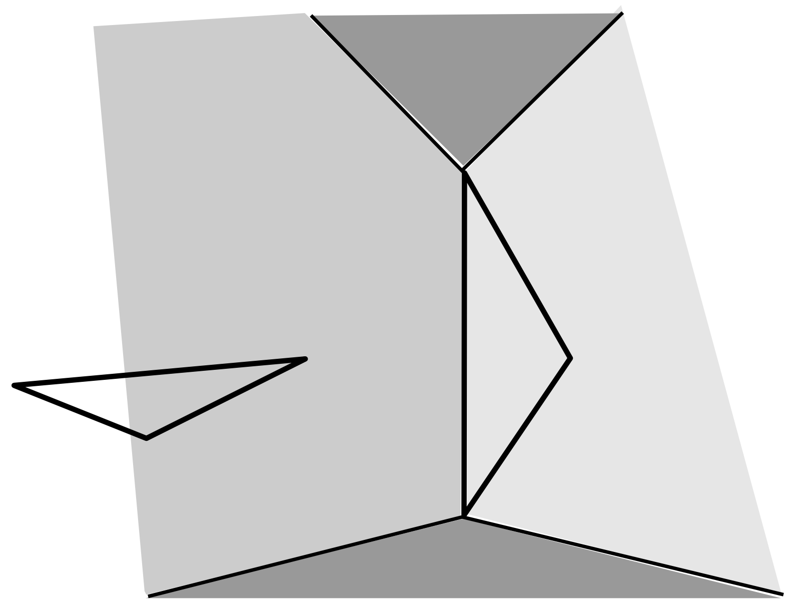
Last step shortest path map

- Der letzte Schritt des Kürzesten Weges
- Einfacher Teil der vollen SPM!

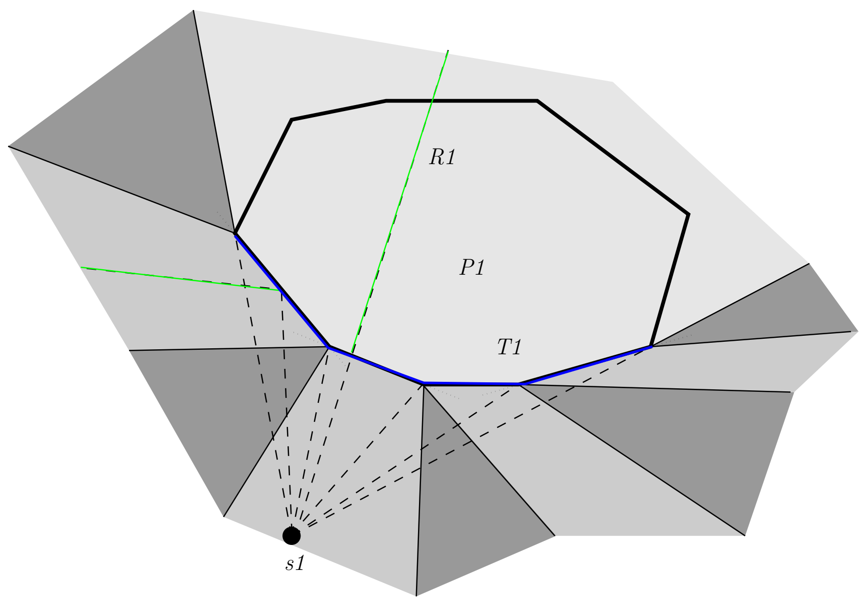


Last step shortest path map

- Der letzte Schritt des Kürzesten Weges
- Einfacher Teil der vollen SPM!
- Durchgang, Reflektion, Kante/Knoten

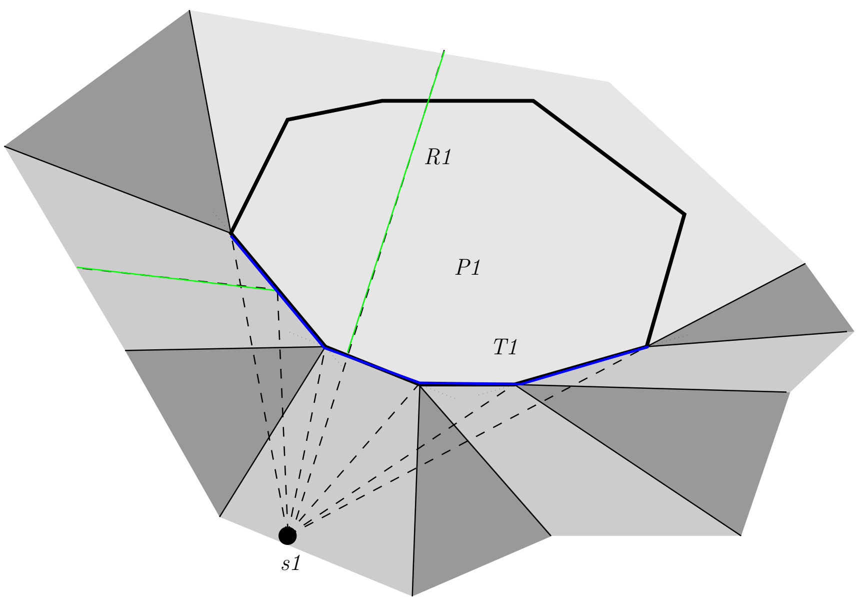


Last Step SPM $S_1, S_2, \ldots, S_k$



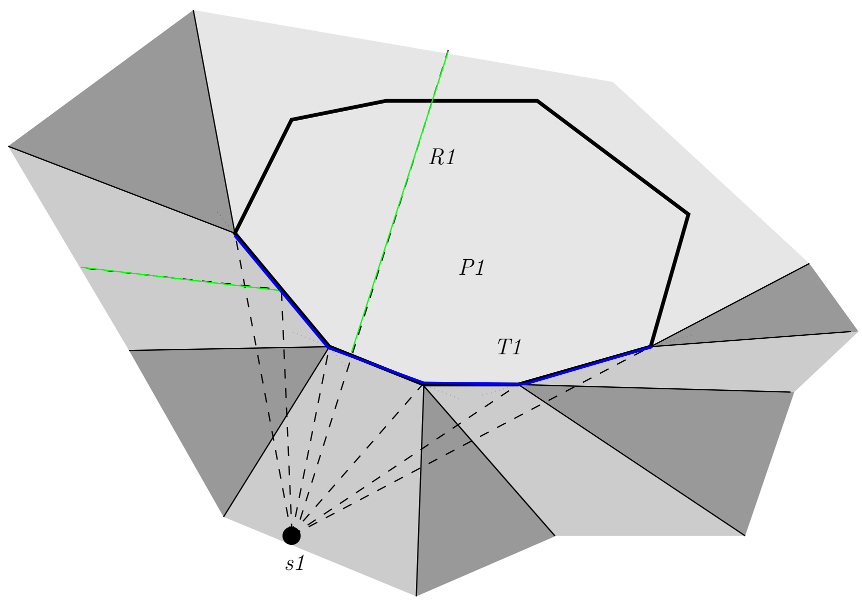
Last Step SPM $S_1, S_2, \ldots, S_k$

- S_i gehört zur Sequenz $P_1, P_2, \ldots, P_i$



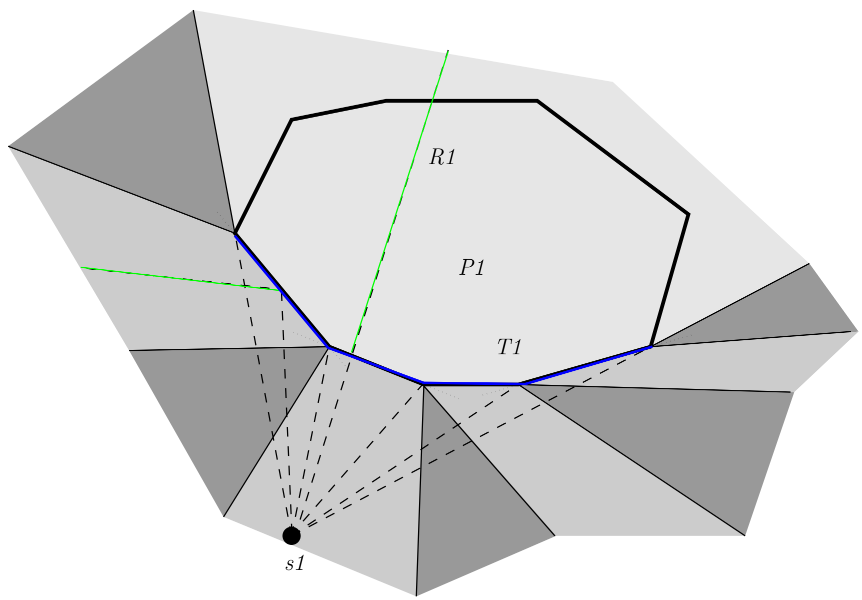
Last Step SPM $S_1, S_2, \ldots, S_k$

- S_i gehört zur Sequenz $P_1, P_2, \ldots, P_i$
- Beschaffenheit S_i: Reflektionsbereich T_i (konvexe Kette)



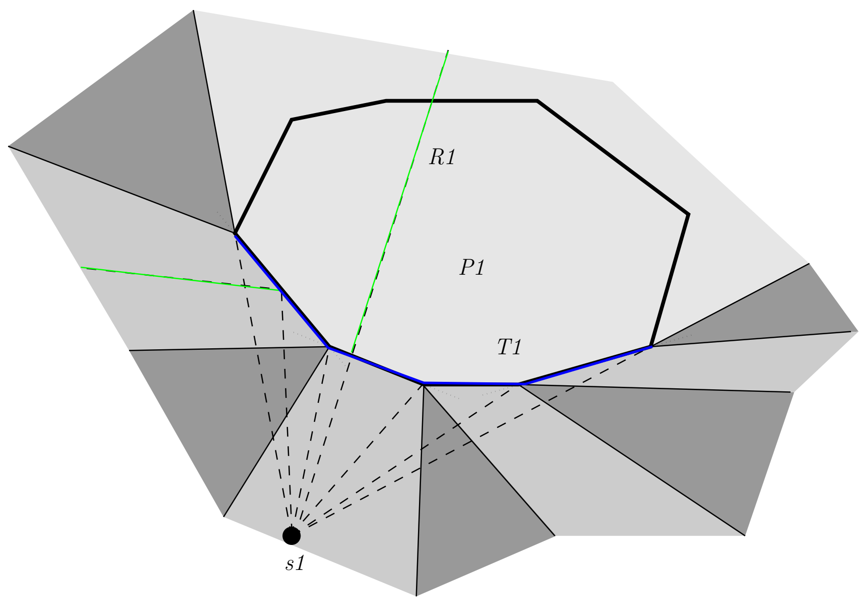
Last Step SPM $S_1, S_2, \ldots, S_k$

- S_i gehört zur Sequenz $P_1, P_2, \ldots, P_i$
- Beschaffenheit S_i: Reflektionsbereich T_i (konvexe Kette)
- Ausgehende Strahlen: Stern R_i, disjunkt



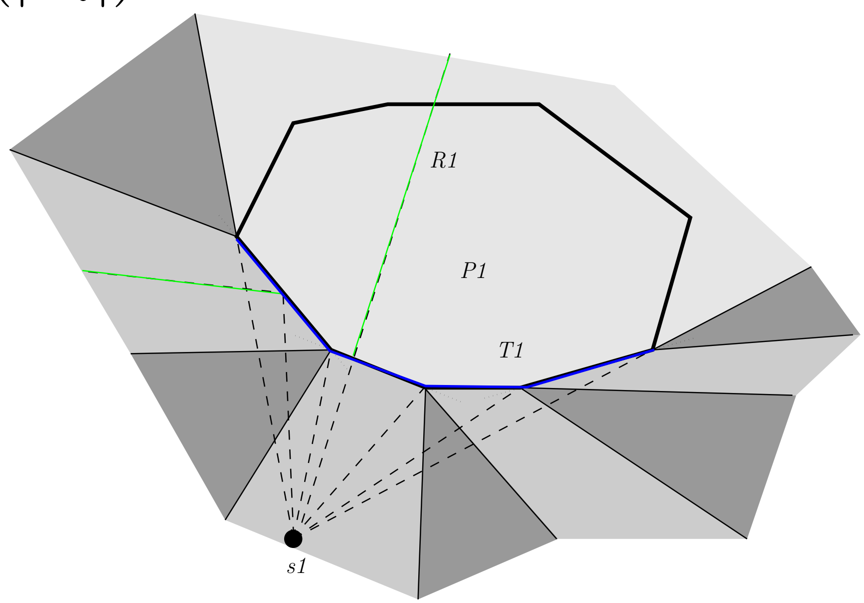
Last Step SPM $S_1, S_2, \ldots, S_k$

- S_i gehört zur Sequenz $P_1, P_2, \ldots, P_i$
- Beschaffenheit S_i: Reflektionsbereich T_i (konvexe Kette)
- Ausgehende Strahlen: Stern R_i, disjunkt
- Jeder Punkt wird von genau einem Strahl getroffen



Last Step SPM $S_1, S_2, \ldots, S_k$

- S_i gehört zur Sequenz $P_1, P_2, \ldots, P_i$
- Beschaffenheit S_i: Reflektionsbereich T_i (konvexe Kette)
- Ausgehende Strahlen: Stern R_i, disjunkt
- Jeder Punkt wird von genau einem Strahl getroffen
- Komplexität: $O(|P_i|)$



Lemma 1.32: Beweis!

Lemma 1.32: Beweis!

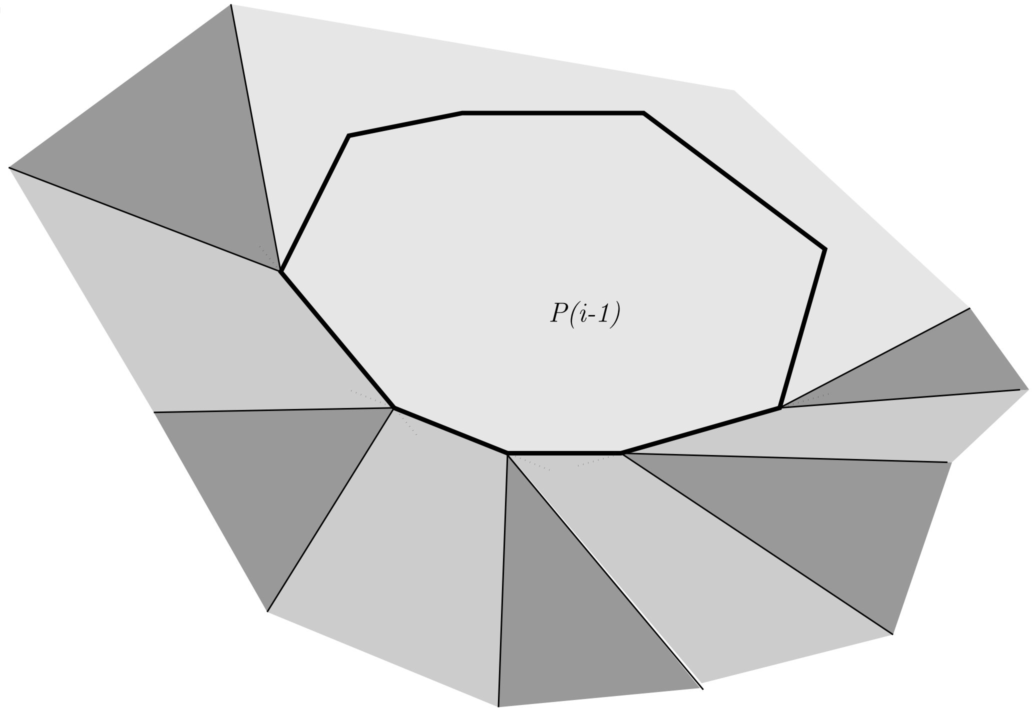
- Ind.: $O(|P_i|)$, Konvexe Kette T_i, Disjunkter Stern R_i

Lemma 1.32: Beweis!

- Ind.: $O(|P_i|)$, Konvexe Kette T_i,
  Disjunkter Stern R_i
- Gilt für S_1

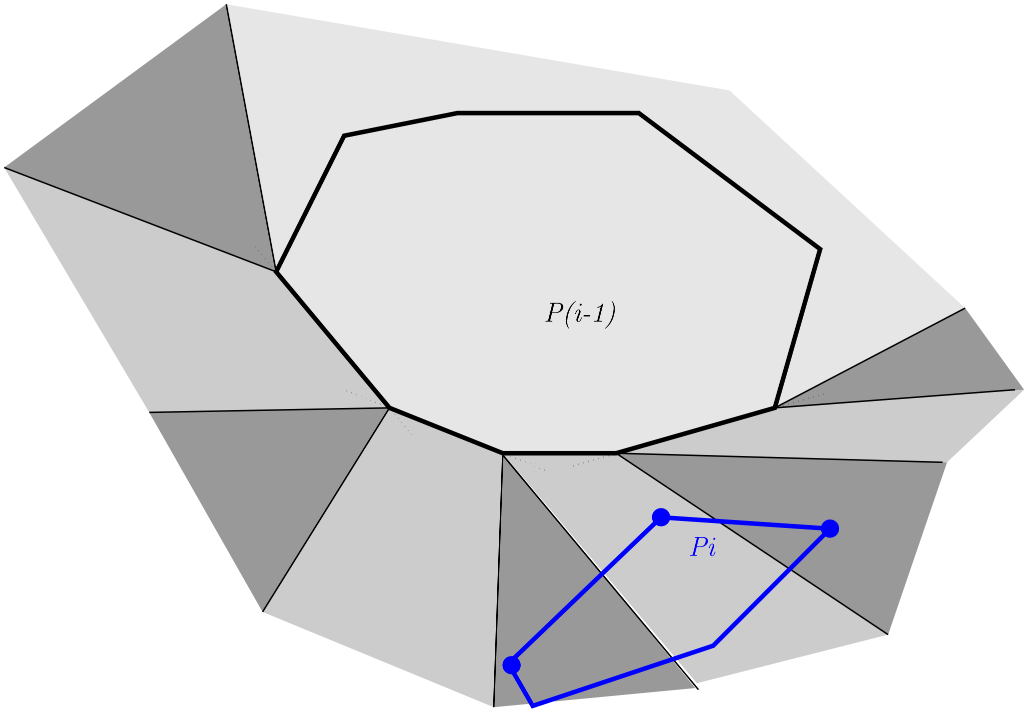
Lemma 1.32: Beweis!

- Ind.: $O(|P_i|)$, Konvexe Kette T_i, Disjunkter Stern R_i
- Gilt für S_1
- Annahme: Gilt für $S_1, S_2, \ldots, S_{i-1}$



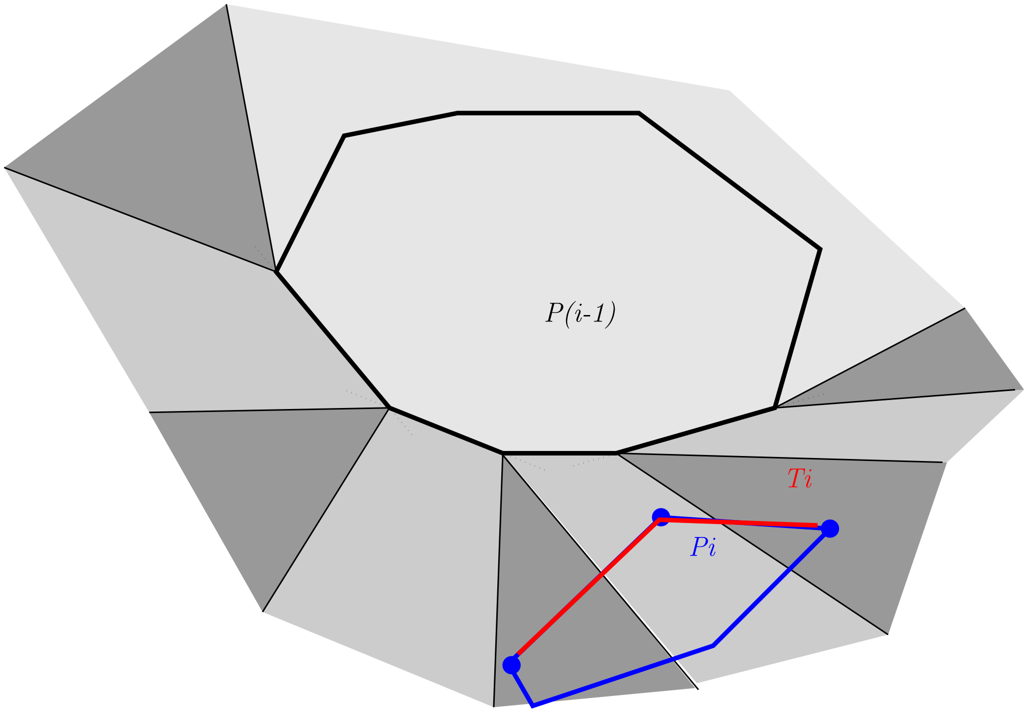
Lemma 1.32: Beweis!

- Ind.: $O(|P_i|)$, Konvexe Kette T_i, Disjunkter Stern R_i
- Gilt für S_1
- Annahme: Gilt für $S_1, S_2, \ldots, S_{i-1}$
- Lege konvexes Polygon P_i in S_{i-1}



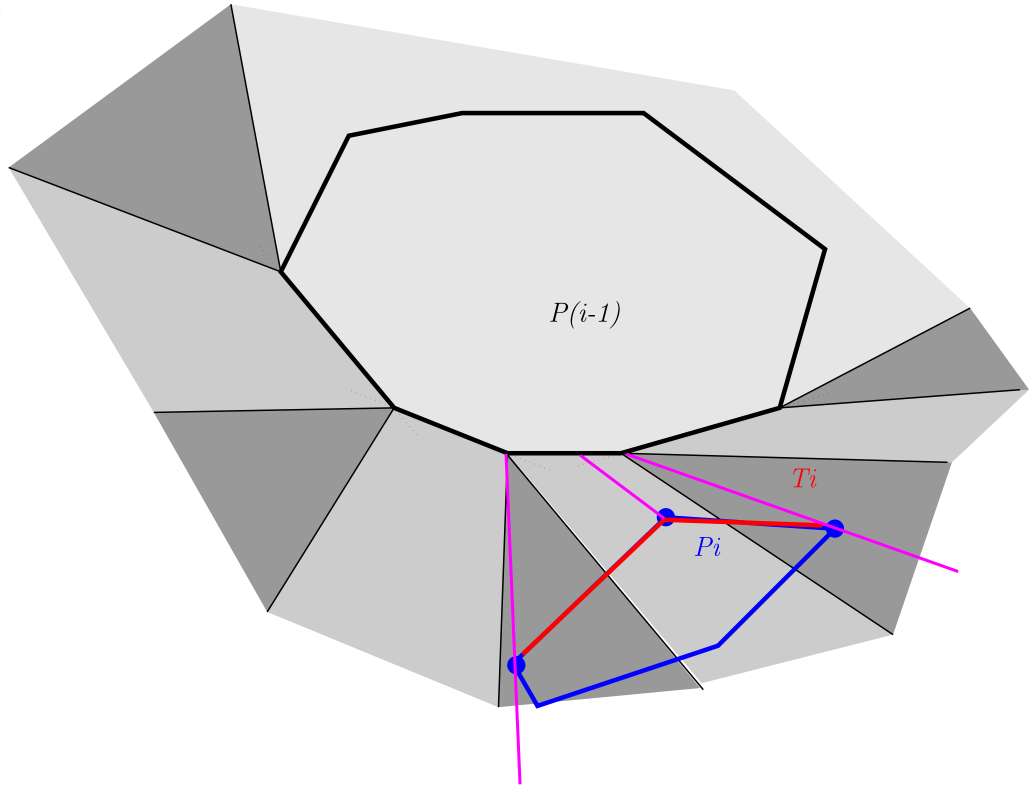
Lemma 1.32: Beweis!

- Ind.: $O(|P_i|)$, Konvexe Kette T_i, Disjunkter Stern R_i
- Gilt für S_1
- Annahme: Gilt für $S_1, S_2, \ldots, S_{i-1}$
- Lege konvexes Polygon P_i in S_{i-1}
- *Sichtbare* Eckpunkte konvexer Kette von disjunkten Strahlen getroffen



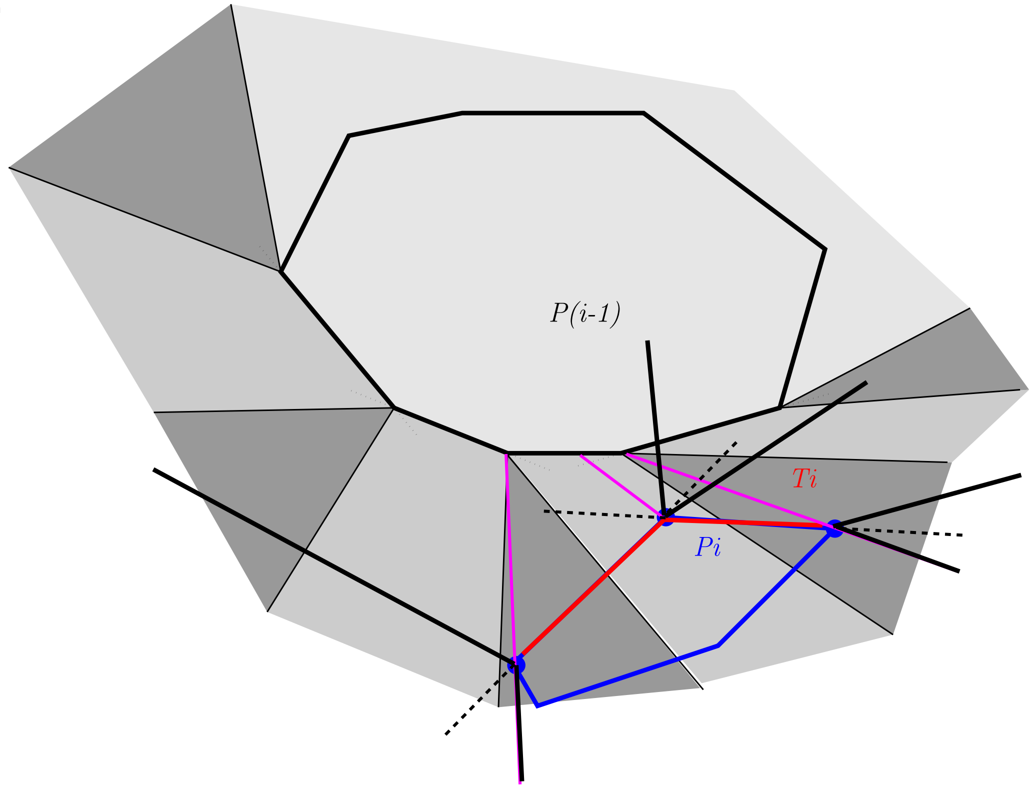
Lemma 1.32: Beweis!

- Ind.: $O(|P_i|)$, Konvexe Kette T_i, Disjunkter Stern R_i
- Gilt für S_1
- Annahme: Gilt für $S_1, S_2, \ldots, S_{i-1}$
- Lege konvexes Polygon P_i in S_{i-1}
- *Sichtbare* Eckpunkte konvexer Kette von disjunkten Strahlen getroffen



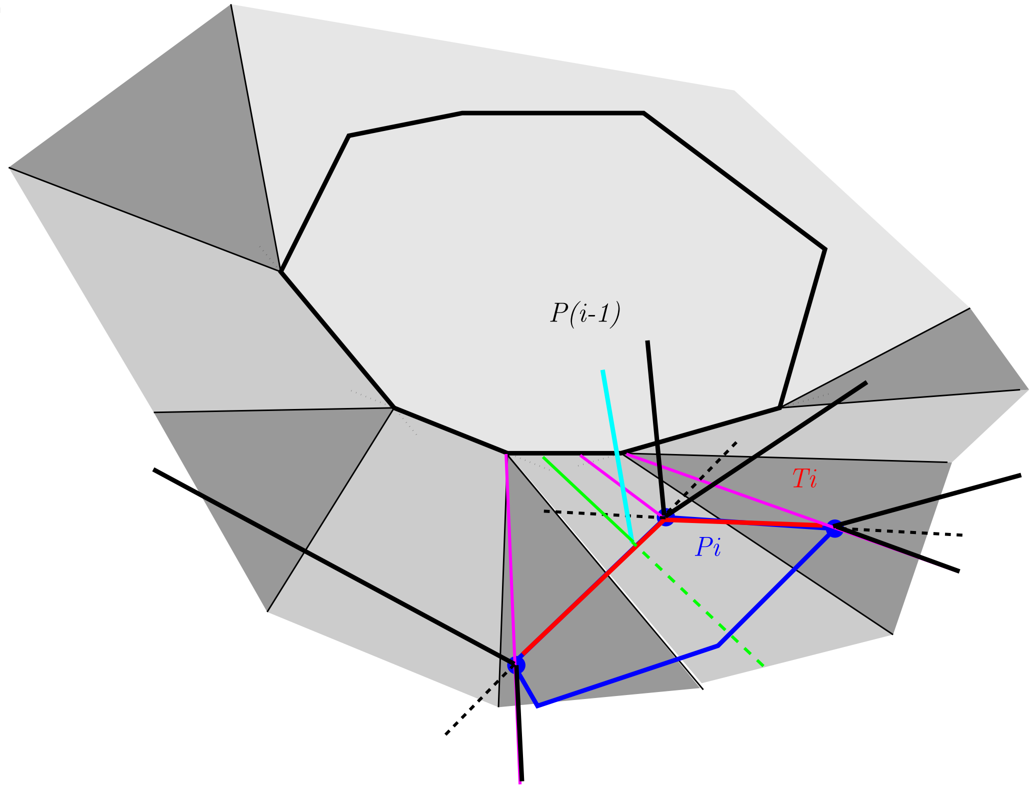
Lemma 1.32: Beweis!

- Ind.: $O(|P_i|)$, Konvexe Kette T_i, Disjunkter Stern R_i
- Gilt für S_1
- Annahme: Gilt für $S_1, S_2, \ldots, S_{i-1}$
- Lege konvexes Polygon P_i in S_{i-1}
- *Sichtbare* Eckpunkte konvexer Kette von disjunkten Strahlen getroffen
- Reflektionen disjunkt



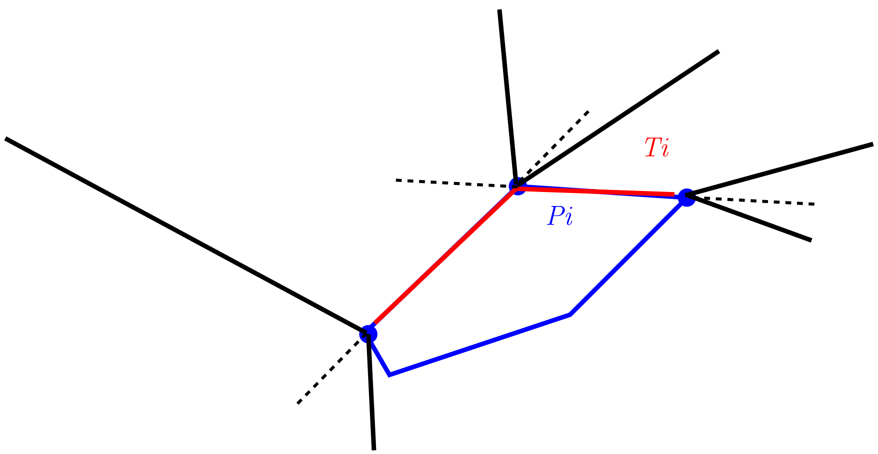
Lemma 1.32: Beweis!

- Ind.: $O(|P_i|)$, Konvexe Kette T_i, Disjunkter Stern R_i
- Gilt für S_1
- Annahme: Gilt für $S_1, S_2, \ldots, S_{i-1}$
- Lege konvexes Polygon P_i in S_{i-1}
- *Sichtbare* Eckpunkte konvexer Kette von disjunkten Strahlen getroffen
- Reflektionen disjunkt



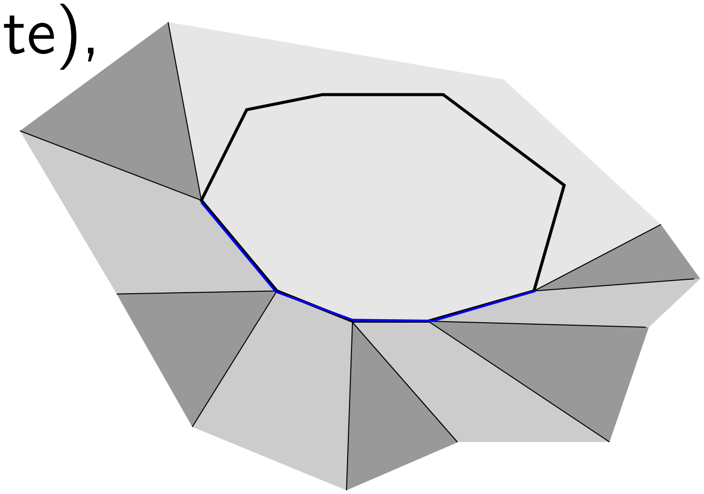
Lemma 1.32: Beweis!

- Ind.: $O(|P_i|)$, Konvexe Kette T_i, Disjunkter Stern R_i
- Gilt für S_1
- Annahme: Gilt für $S_1, S_2, \ldots, S_{i-1}$
- Lege konvexes Polygon P_i in S_{i-1}
- *Sichtbare* Eckpunkte konvexer Kette von disjunkten Strahlen getroffen
- Reflektionen disjunkt



DS und Komplexität für S_i!

- Vorbereitet für Lokalisation
- Reflektionsbereich(Knoten/Kante), Durchgangsbereich
- Konvexe Kette, n_i disjunkte Strahlen
- Balancierter Baum: Lokalization in $O(\log n_i)$
- Für alle S_i gleich



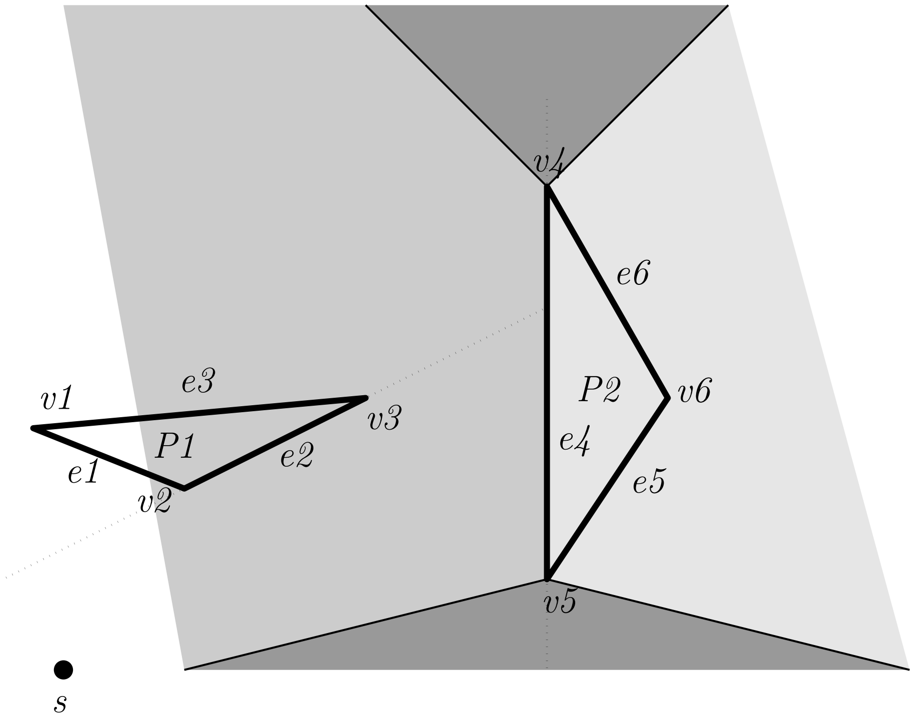
Benutzung der Last Step SPM: Alg. 1.10

Benutzung der Last Step SPM: Alg. 1.10

- Ziel t_1: Nutze Last Step SPM von P_k

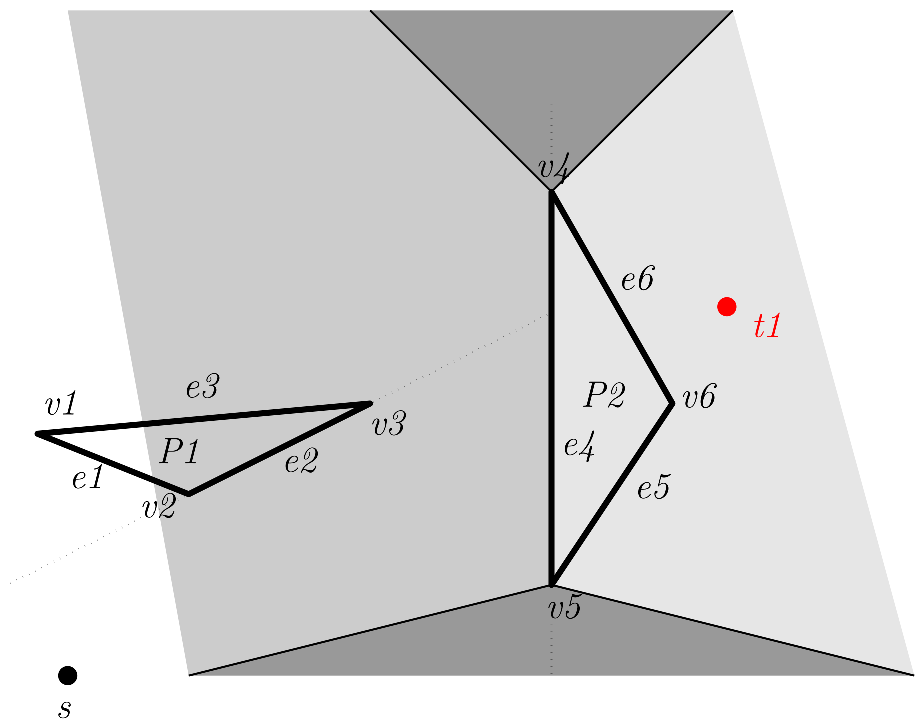
Benutzung der Last Step SPM: Alg. 1.10

- Ziel t_1: Nutze Last Step SPM von P_k
- Induktiv nutze Last Step SPM von P_{k-1}



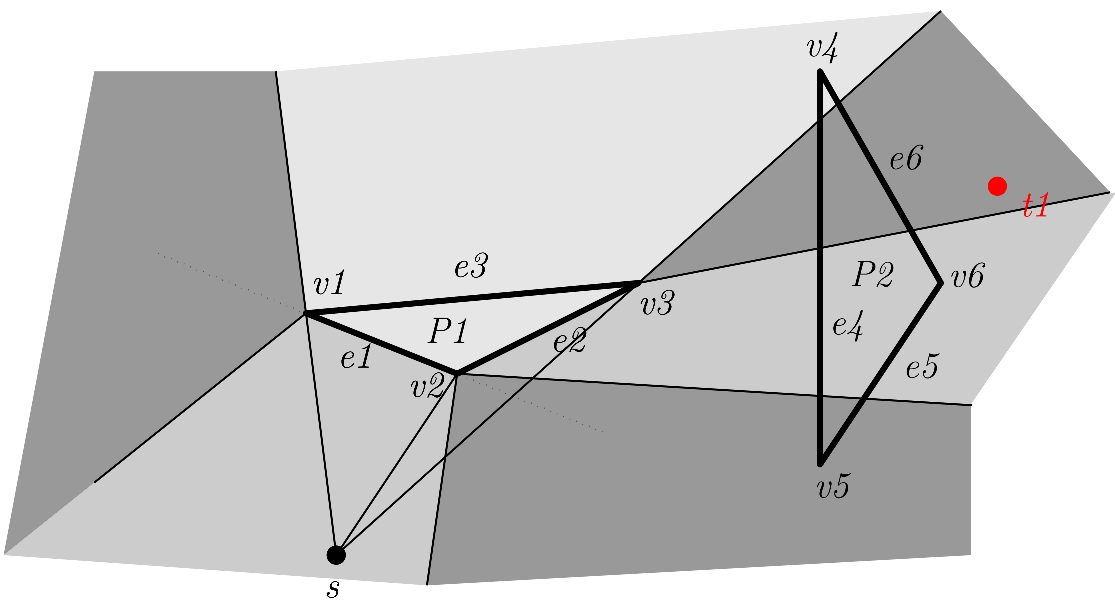
Benutzung der Last Step SPM: Alg. 1.10

- Ziel t_1: Nutze Last Step SPM von P_k
- Induktiv nutze Last Step SPM von P_{k-1}



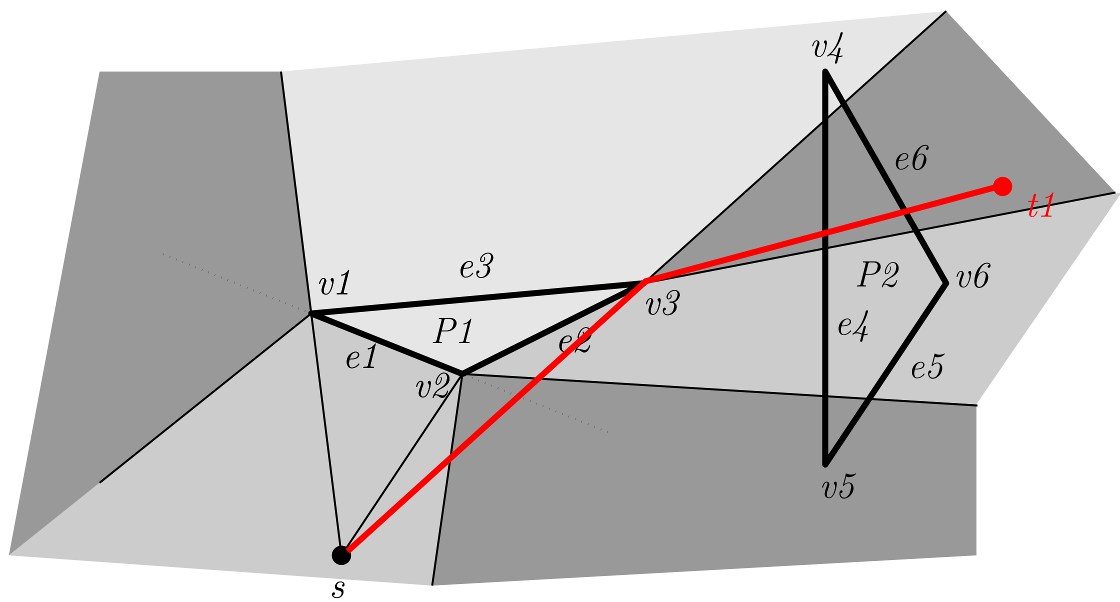
Benutzung der Last Step SPM: Alg. 1.10

- Ziel t_1: Nutze Last Step SPM von P_k
- Induktiv nutze Last Step SPM von P_{k-1}



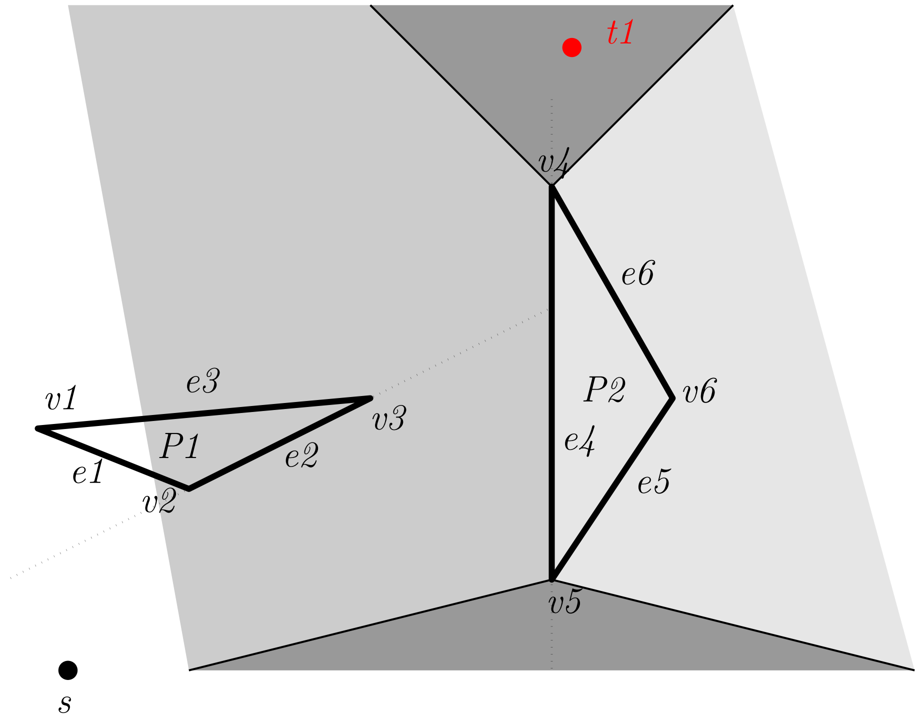
Benutzung der Last Step SPM: Alg. 1.10

- Ziel t_1: Nutze Last Step SPM von P_k
- Induktiv nutze Last Step SPM von P_{k-1}



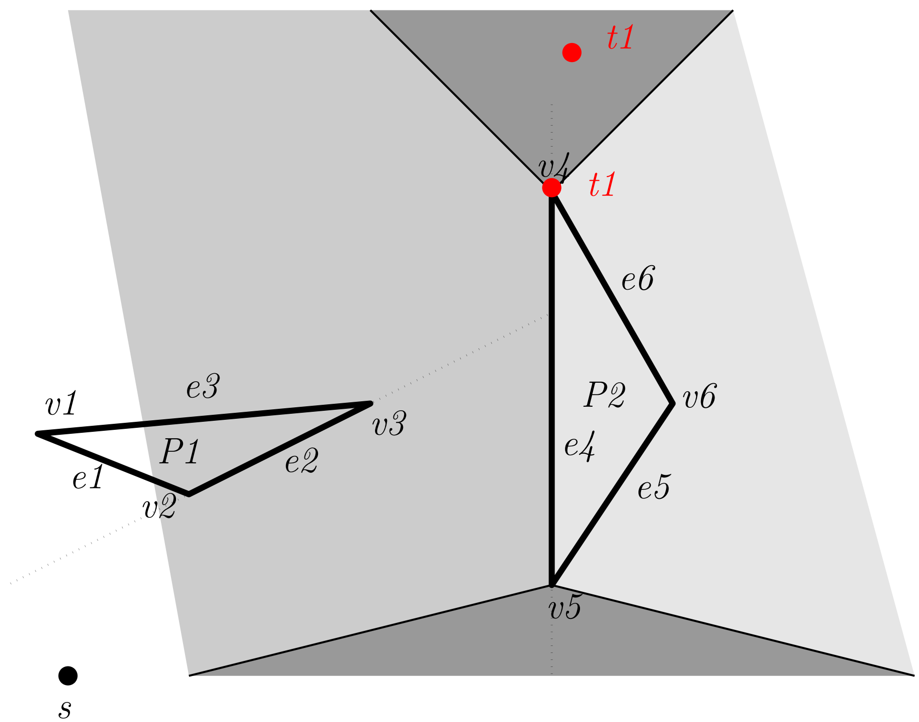
Benutzung der Last Step SPM: Alg. 1.10

- Ziel t_1: Nutze Last Step SPM von P_k
- Induktiv nutze Last Step SPM von P_{k-1}



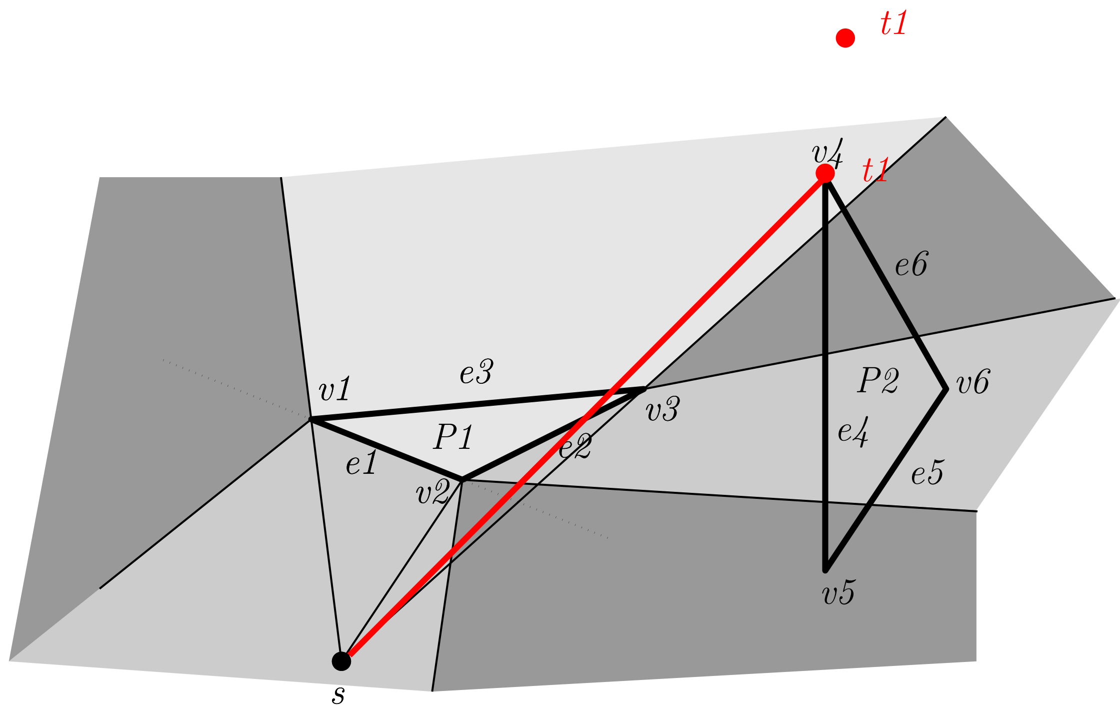
Benutzung der Last Step SPM: Alg. 1.10

- Ziel t_1: Nutze Last Step SPM von P_k
- Induktiv nutze Last Step SPM von P_{k-1}



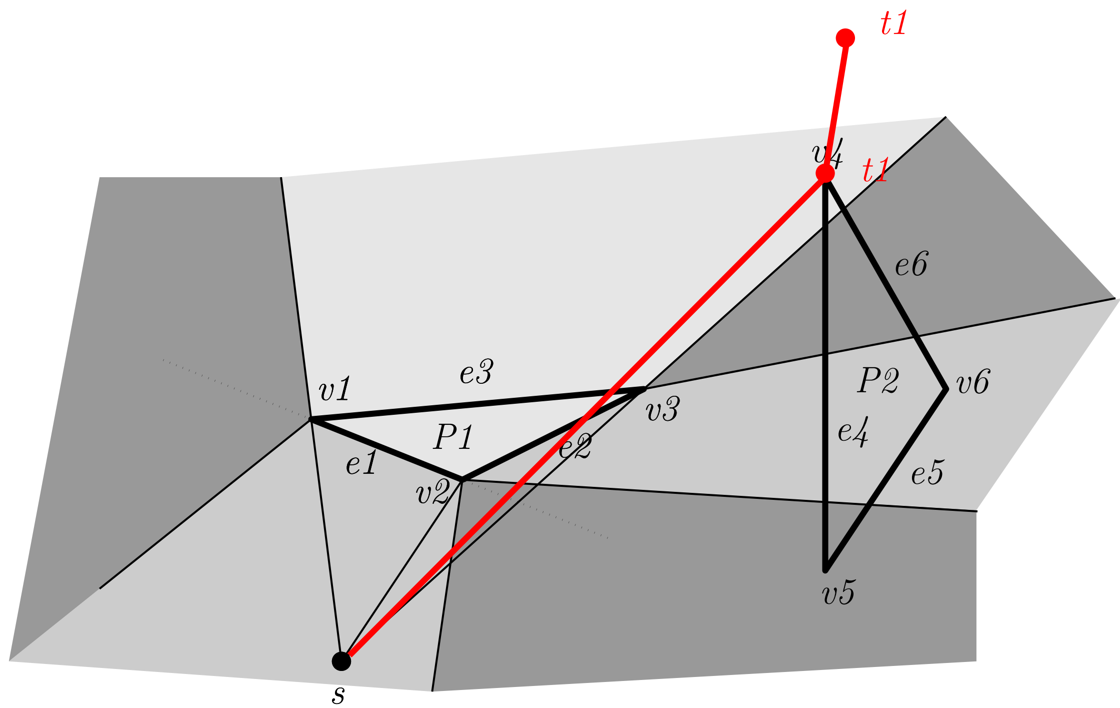
Benutzung der Last Step SPM: Alg. 1.10

- Ziel t_1: Nutze Last Step SPM von P_k
- Induktiv nutze Last Step SPM von P_{k-1}



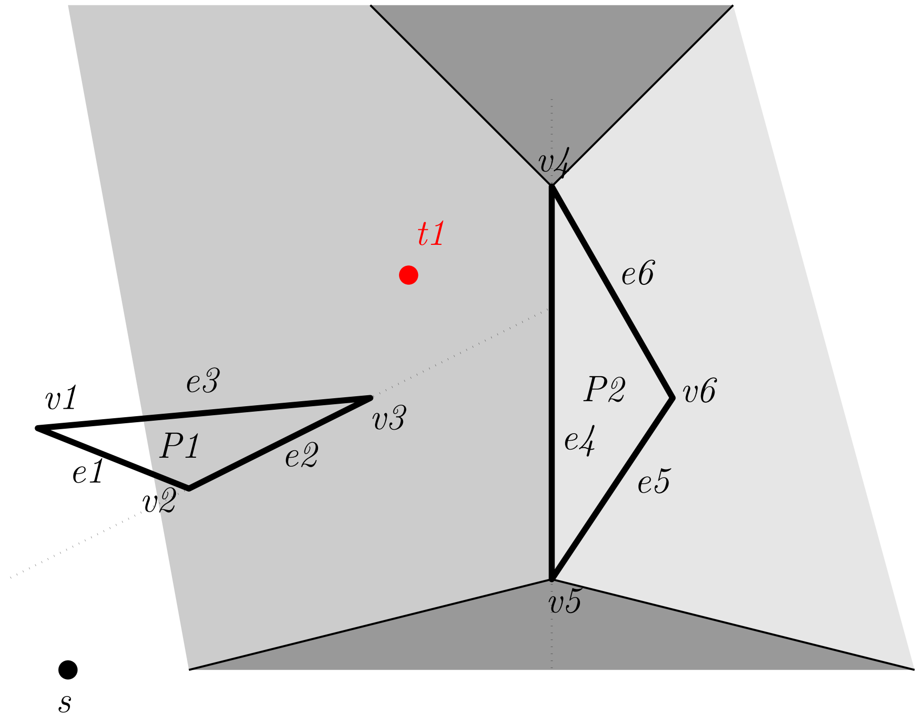
Benutzung der Last Step SPM: Alg. 1.10

- Ziel t_1: Nutze Last Step SPM von P_k
- Induktiv nutze Last Step SPM von P_{k-1}



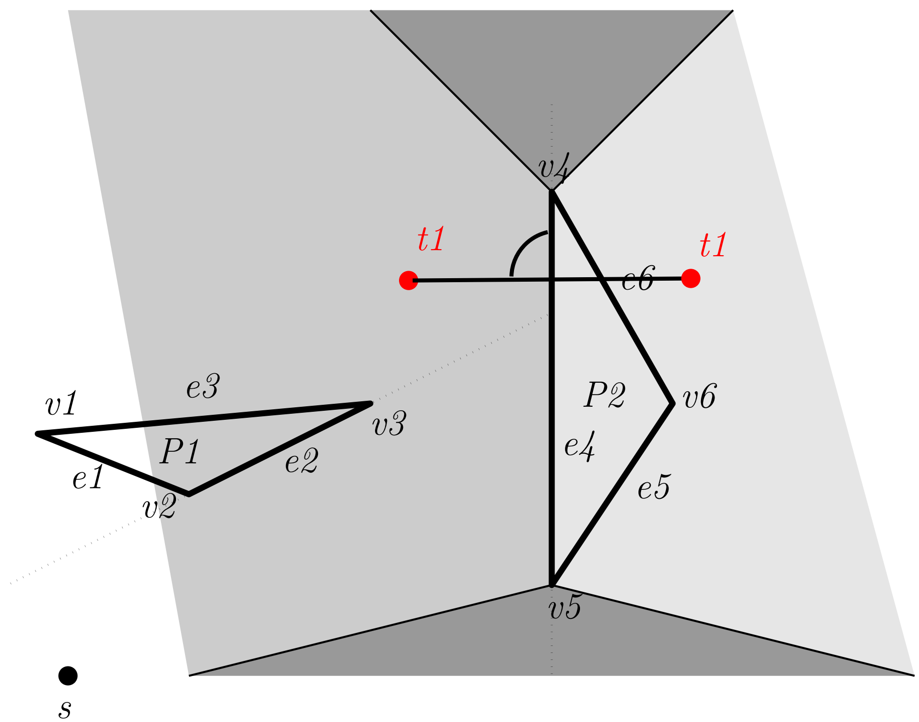
Benutzung der Last Step SPM: Alg. 1.10

- Ziel t_1: Nutze Last Step SPM von P_k
- Induktiv nutze Last Step SPM von P_{k-1}



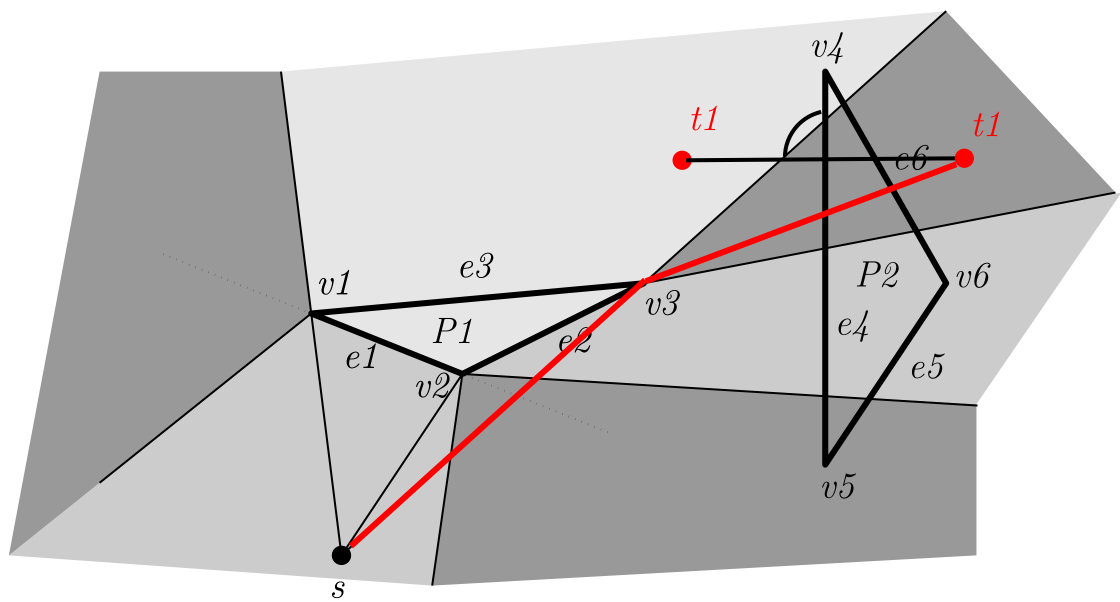
Benutzung der Last Step SPM: Alg. 1.10

- Ziel t_1: Nutze Last Step SPM von P_k
- Induktiv nutze Last Step SPM von P_{k-1}



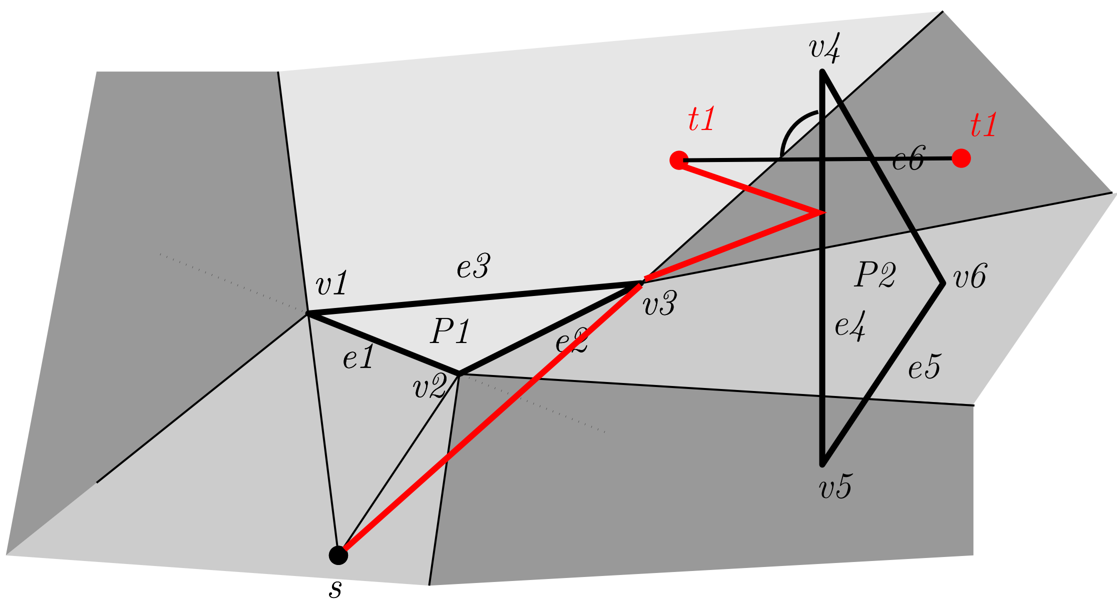
Benutzung der Last Step SPM: Alg. 1.10

- Ziel t_1: Nutze Last Step SPM von P_k
- Induktiv nutze Last Step SPM von P_{k-1}



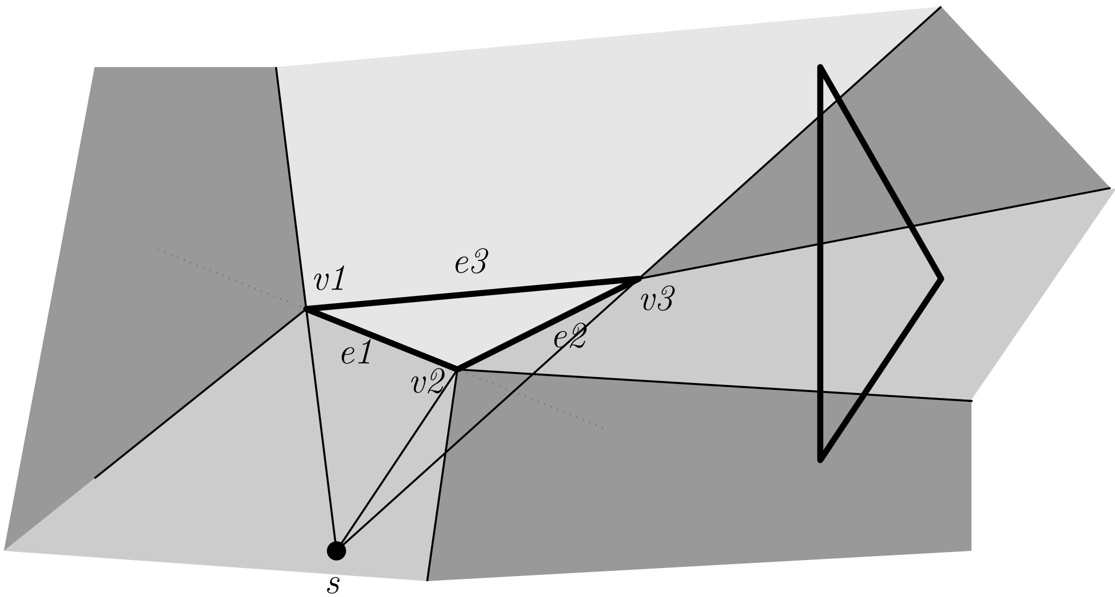
Benutzung der Last Step SPM: Alg. 1.10

- Ziel t_1: Nutze Last Step SPM von P_k
- Induktiv nutze Last Step SPM von P_{k-1}



Benutzung der Last Step SPM: Alg. 1.10

- Ziel t_1: Nutze Last Step SPM von P_k
- Induktiv nutze Last Step SPM von P_{k-1}



Analyse der Query! Lemma 1.33

- Annahme: Alle Last Step SPM sind gegeben
- $$\sum_{i=1}^{k} \log n_i \quad \text{mit} \sum_{i=1}^{k} n_i = n$$
- Worst-Case:
$$n_i = \frac{n}{k}$$
- Alles zusammen:
$$O(k \log \frac{n}{k})$$

Berechnung $S_1, \ldots, S_k$: Alg. 1.11

Berechnung $S_1, \ldots, S_k$: Alg. 1.11

- Queries: Backward

Berechnung $S_1, \ldots, S_k$: Alg. 1.11

- Queries: Backward
- Berechnung: Forward

Berechnung $S_1, \ldots, S_k$: Alg. 1.11

- Queries: Backward
- Berechnung: Forward
- SPM für P_1

Berechnung $S_1, \ldots, S_k$**:** **Alg. 1.11**

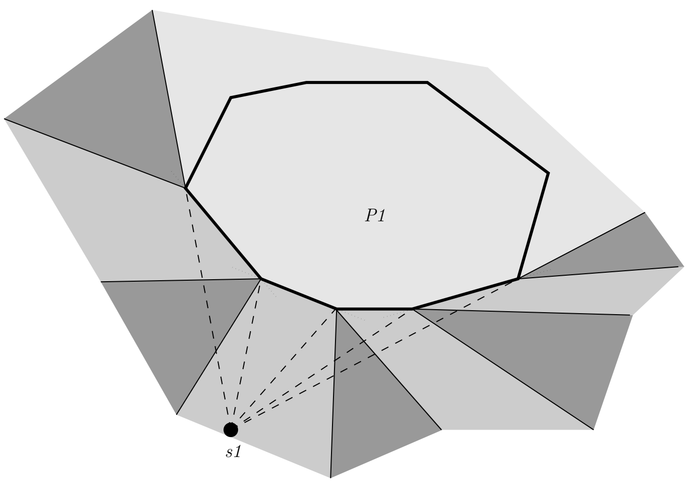
- Queries: Backward
- Berechnung: Forward
- SPM für P_1
- Sichtbare konvexe Kette/Baum der Strahlen: $O(n_1)$

Berechnung $S_1, \ldots, S_k$: Alg. 1.11

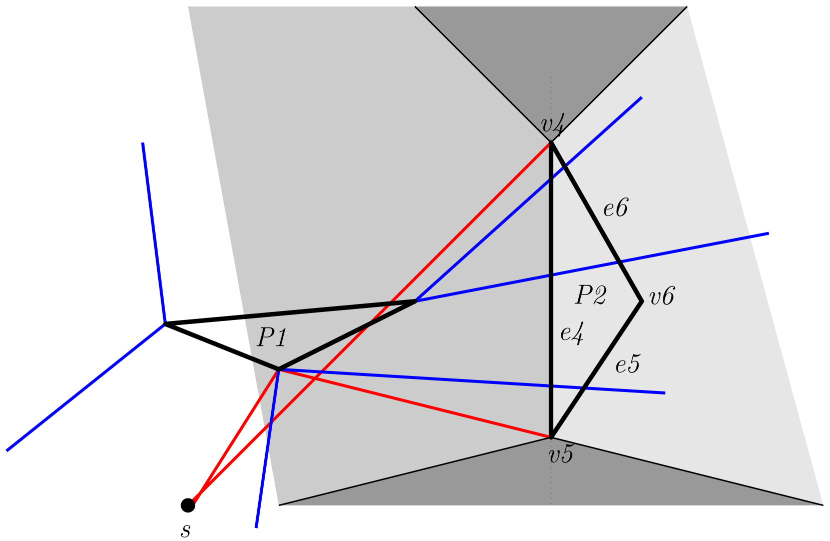
- Queries: Backward
- Berechnung: Forward
- SPM für P_1
- Sichtbare konvexe Kette/Baum der Strahlen: $O(n_1)$
- Disjunkte Reflektionen!!

Berechnung $S_1, \ldots, S_k$: Alg. 1.11

- Queries: Backward
- Berechnung: Forward
- SPM für P_1
- Sichtbare konvexe Kette/Baum der Strahlen: $O(n_1)$
- Disjunkte Reflektionen!!

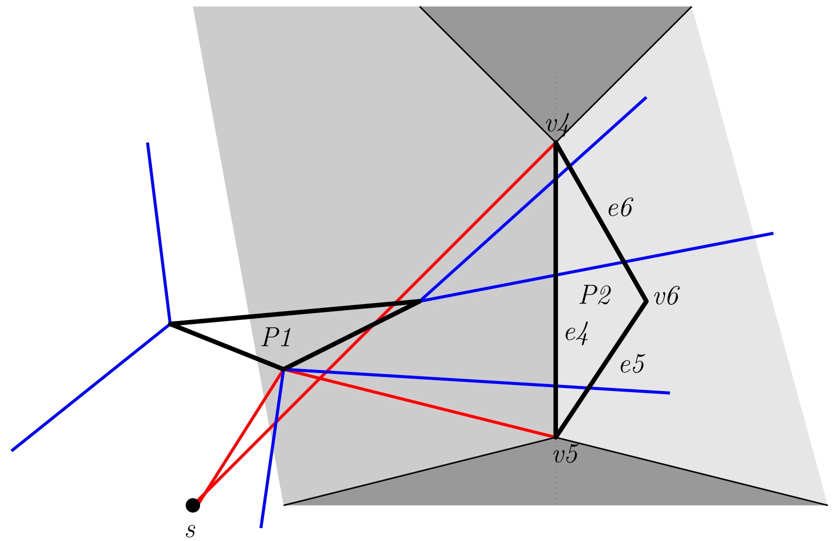


Berechnung $S_1, \ldots, S_k$: Alg. 1.11



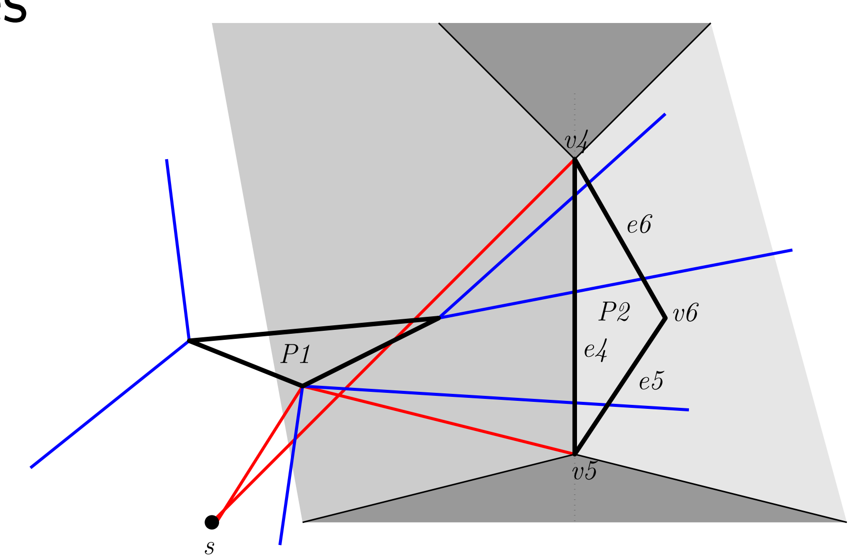
Berechnung $S_1, \ldots, S_k$: Alg. 1.11

- SPM von P_i aus SPM of $P_{i-1}, \ldots, P_1$



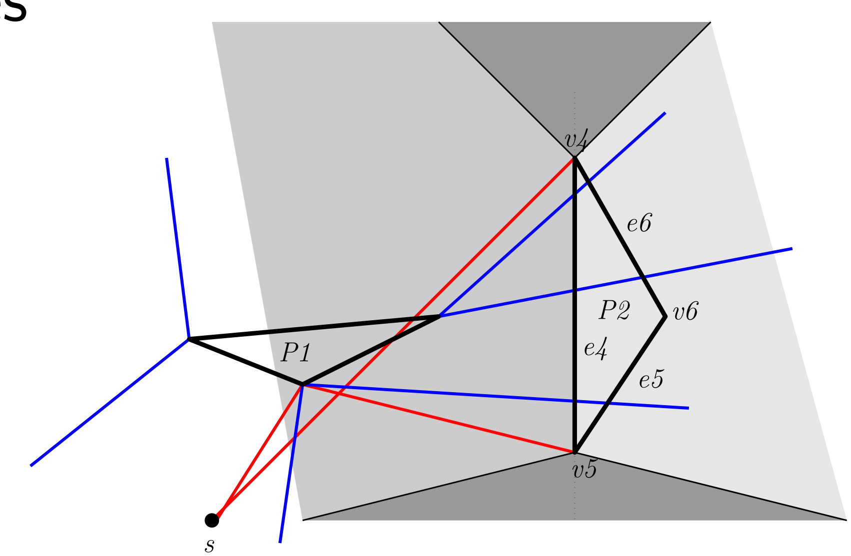
Berechnung $S_1, \ldots, S_k$: Alg. 1.11

- SPM von P_i aus SPM of $P_{i-1}, \ldots, P_1$
- Letztes Segment des Kürzesten Weges von s zu Knoten von P_i



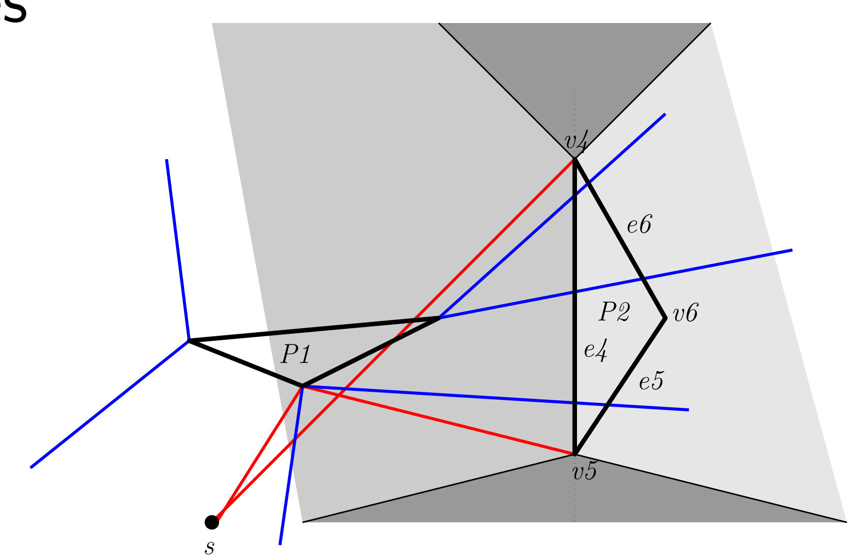
Berechnung $S_1, \ldots, S_k$: Alg. 1.11

- SPM von P_i aus SPM of $P_{i-1}, \ldots, P_1$
- Letztes Segment des Kürzesten Weges von s zu Knoten von P_i
- Query: Nutze SPM $P_{i-1}, \ldots, P_1$



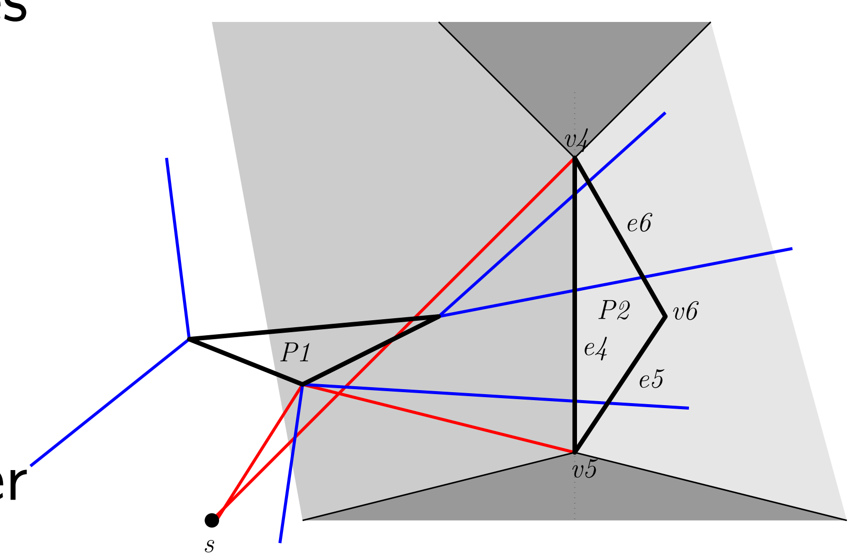
Berechnung $S_1, \ldots, S_k$: **Alg. 1.11**

- SPM von P_i aus SPM of $P_{i-1}, \ldots, P_1$
- Letztes Segment des Kürzesten Weges von s zu Knoten von P_i
- Query: Nutze SPM $P_{i-1}, \ldots, P_1$
- Laufzeit: $O\left(n_i(i-1)\log\frac{N_{i-1}}{i-1}\right)$
  mit $N_j := \sum_{l=1}^{j} n_l$



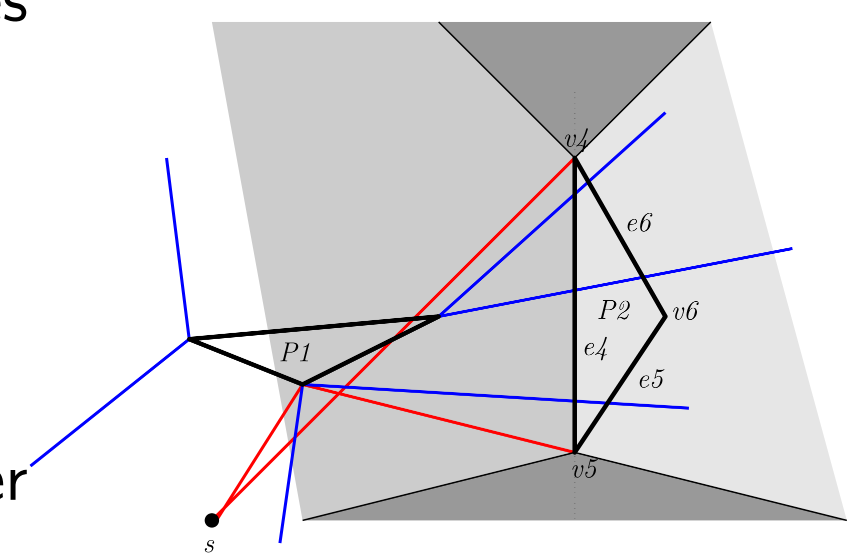
Berechnung $S_1, \ldots, S_k$: Alg. 1.11

- SPM von P_i aus SPM of $P_{i-1}, \ldots, P_1$
- Letztes Segment des Kürzesten Weges von s zu Knoten von P_i
- Query: Nutze SPM $P_{i-1}, \ldots, P_1$
- Laufzeit: $O\left(n_i(i-1)\log\frac{N_{i-1}}{i-1}\right)$ mit $N_j := \sum_{l=1}^{j} n_l$
- Sichtbare konvexe Kette/Baum der Strahlen



Berechnung $S_1, \ldots, S_k$: Alg. 1.11

- SPM von P_i aus SPM of $P_{i-1}, \ldots, P_1$
- Letztes Segment des Kürzesten Weges von s zu Knoten von P_i
- Query: Nutze SPM $P_{i-1}, \ldots, P_1$
- Laufzeit: $O\left(n_i(i-1)\log\frac{N_{i-1}}{i-1}\right)$
  mit $N_j := \sum_{l=1}^{j} n_l$
- Sichtbare konvexe Kette/Baum der Strahlen
- Disjunkt wegen konvexer Kette!!



Analyse Berechnung $S_1, \ldots, S_k$: Theorem 1.34

Analyse Berechnung $S_1, \ldots, S_k$: Theorem 1.34

Rekursiv: P_2,. . . ,P_k

Analyse Berechnung $S_1, \ldots, S_k$: Theorem 1.34

Rekursiv: P_2,. . . ,P_k

Gesamtlaufzeit:

Analyse Berechnung $S_1, \ldots, S_k$: Theorem 1.34

Rekursiv: P_2,. . . ,P_k

Gesamtlaufzeit:

$$\sum_{i=2}^{k} n_i (i-1) \log \frac{N_{i-1}}{i-1}$$

Analyse Berechnung $S_1, \ldots, S_k$: Theorem 1.34

Rekursiv: $P_2, \ldots, P_k$

Gesamtlaufzeit:

$$\sum_{i=2}^{k} n_i(i-1)\log\frac{N_{i-1}}{i-1}$$

$$n_i(i-1)\log\frac{N_{i-1}}{i-1} \quad \leq \quad n_i k \log\frac{n}{k}$$

Analyse Berechnung $S_1, \ldots, S_k$: Theorem 1.34

Rekursiv: P_2,. . . ,P_k

Gesamtlaufzeit:

$$\sum_{i=2}^{k} n_i(i-1)\log\frac{N_{i-1}}{i-1}$$

$$n_i(i-1)\log\frac{N_{i-1}}{i-1} \quad \leq \quad n_i k \log\frac{n}{k}$$

Gesamtlaufzeit:

Analyse Berechnung $S_1, \ldots, S_k$: Theorem 1.34

Rekursiv: $P_2, \ldots, P_k$

Gesamtlaufzeit:

$$\sum_{i=2}^{k} n_i (i-1) \log \frac{N_{i-1}}{i-1}$$

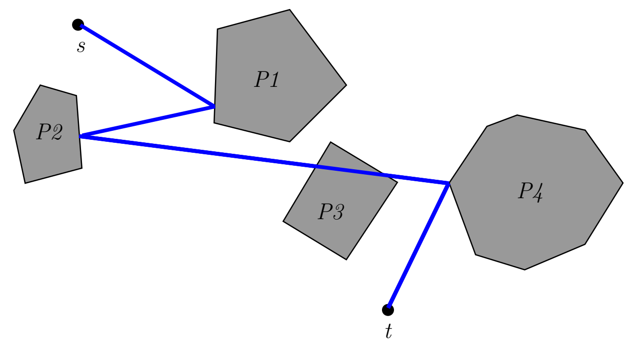
$$n_i (i-1) \log \frac{N_{i-1}}{i-1} \quad \leq \quad n_i k \log \frac{n}{k}$$

Gesamtlaufzeit:

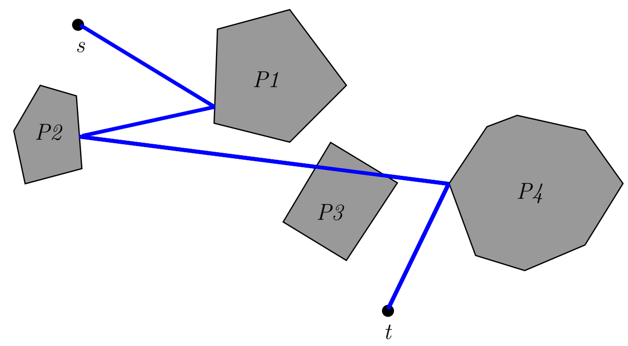
$$O\left(kn \log \frac{n}{k}\right)!$$

Zusammenfassung!!

Zusammenfassung!!



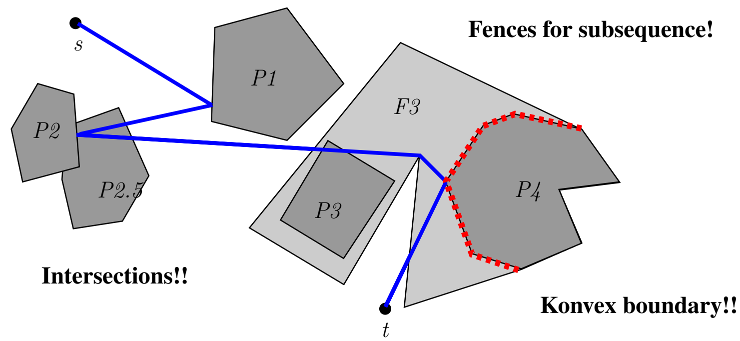
Zusammenfassung!!



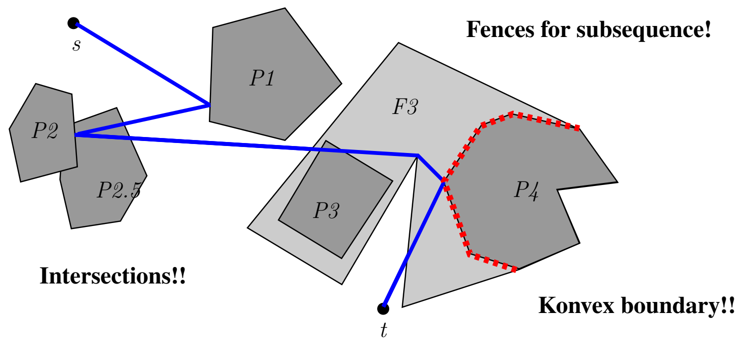
- Einfache Version:
- Disjunkte, konvexe Polygone, keine Zäune
- $O(nk \log \frac{n}{k})$
- Build(Query): $O(nk \log \frac{n}{k})$
- Komplexität: $O(n)$
- Query (festes s): $O(k \log \frac{n}{k})$
- Theorem 1.34

Erweiterung!

Erweiterung!

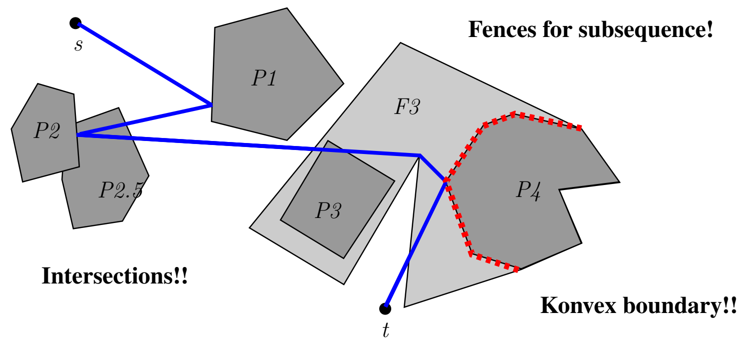


Erweiterung!



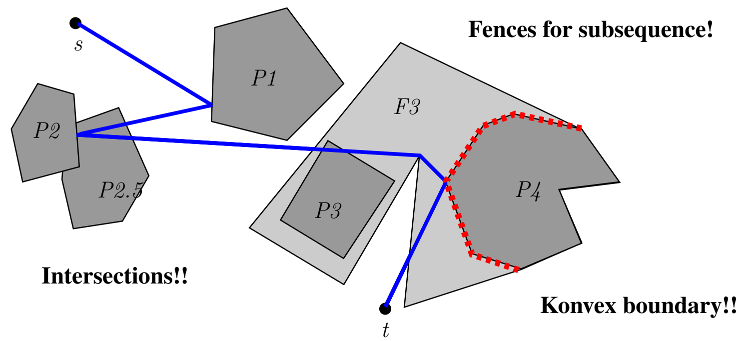
- Komplexe Version:

Erweiterung!



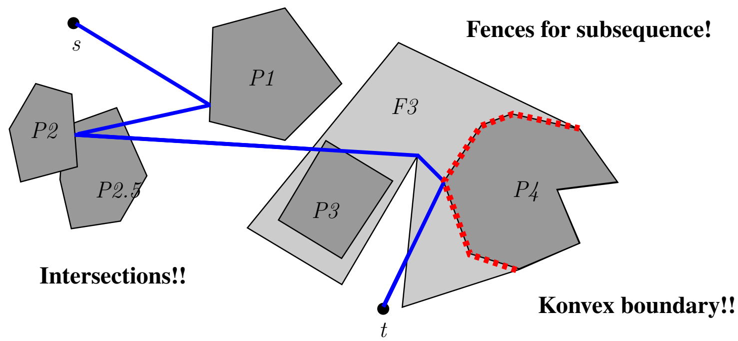
- Komplexe Version:
- Nicht-disjunkte, konvexe Polygone, Zäune

Erweiterung!



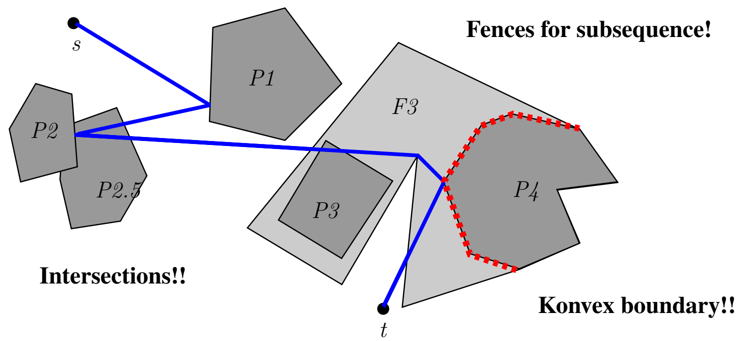
- Komplexe Version:
- Nicht-disjunkte, konvexe Polygone, Zäune
- $O(nk^2 \log n)$ insgesamt

Erweiterung!



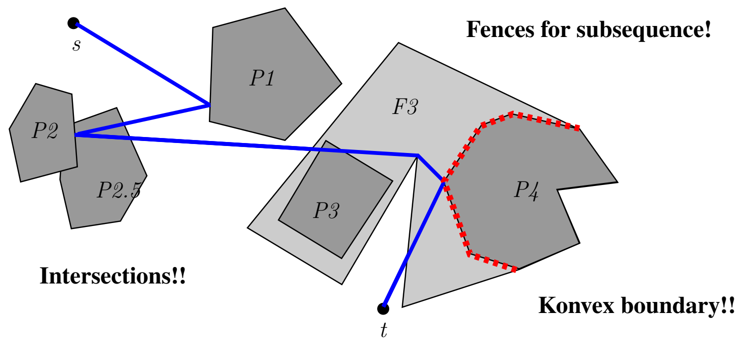
- Komplexe Version:
- Nicht-disjunkte, konvexe Polygone, Zäune
- $O(nk^2 \log n)$ insgesamt
- Build(Query): $O(nk^2 \log n)$

Erweiterung!



- Komplexe Version:
- Nicht-disjunkte, konvexe Polygone, Zäune
- $O(nk^2 \log n)$ insgesamt
- Build(Query): $O(nk^2 \log n)$
- Komplexität: $O(kn)$

Erweiterung!



- Komplexe Version:
- Nicht-disjunkte, konvexe Polygone, Zäune
- $O(nk^2 \log n)$ insgesamt
- Build(Query): $O(nk^2 \log n)$
- Komplexität: $O(kn)$
- Query (festes s): $O(kn)$

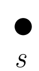
- Lemma 1.35: Reflexionsbereich ist Baum

- Lemma 1.35: Reflexionsbereich ist Baum
- Theorem 1.36/Theorem 1.37

Polyeder-Szene in 3D

Polyeder-Szene in 3D

- Startpunkt s,



Polyeder-Szene in 3D

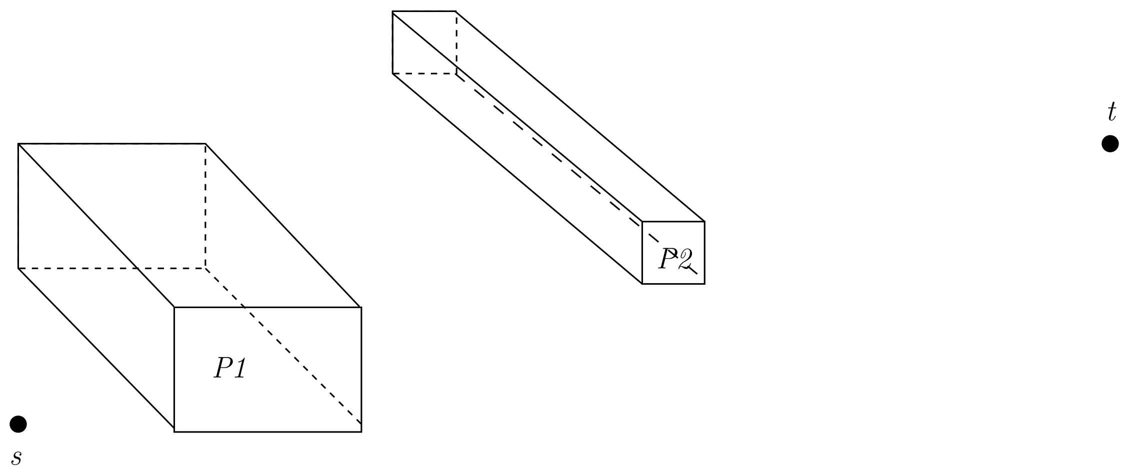
- Startpunkt s, Zielpunkt t

Polyeder-Szene in 3D

- Startpunkt s, Zielpunkt t
- Menge von Polyedern

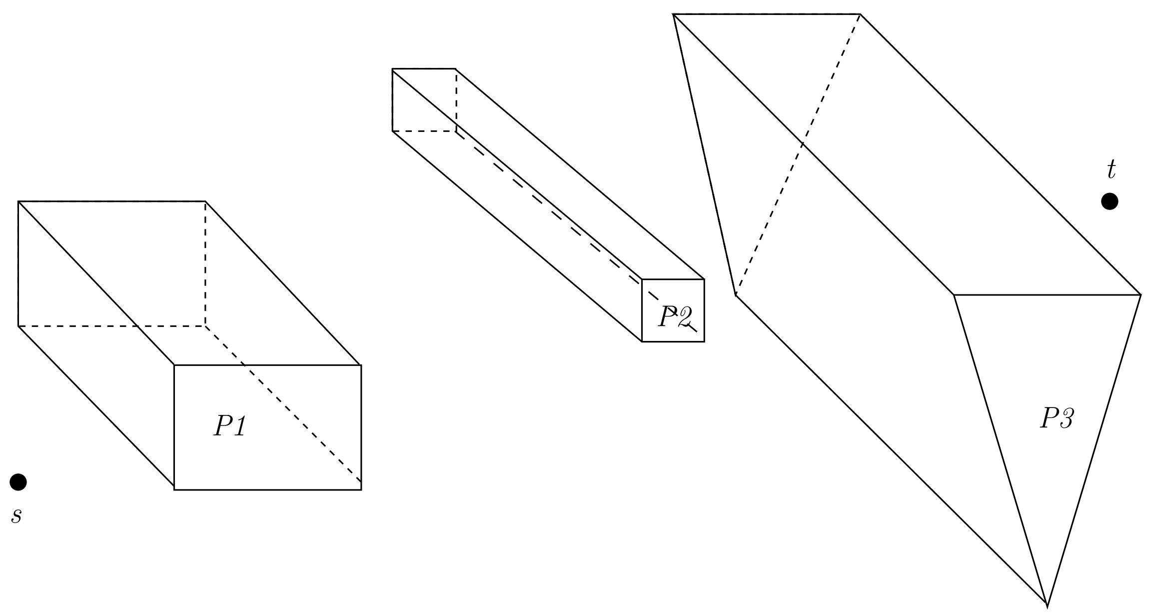
Polyeder-Szene in 3D

- Startpunkt s, Zielpunkt t
- Menge von Polyedern



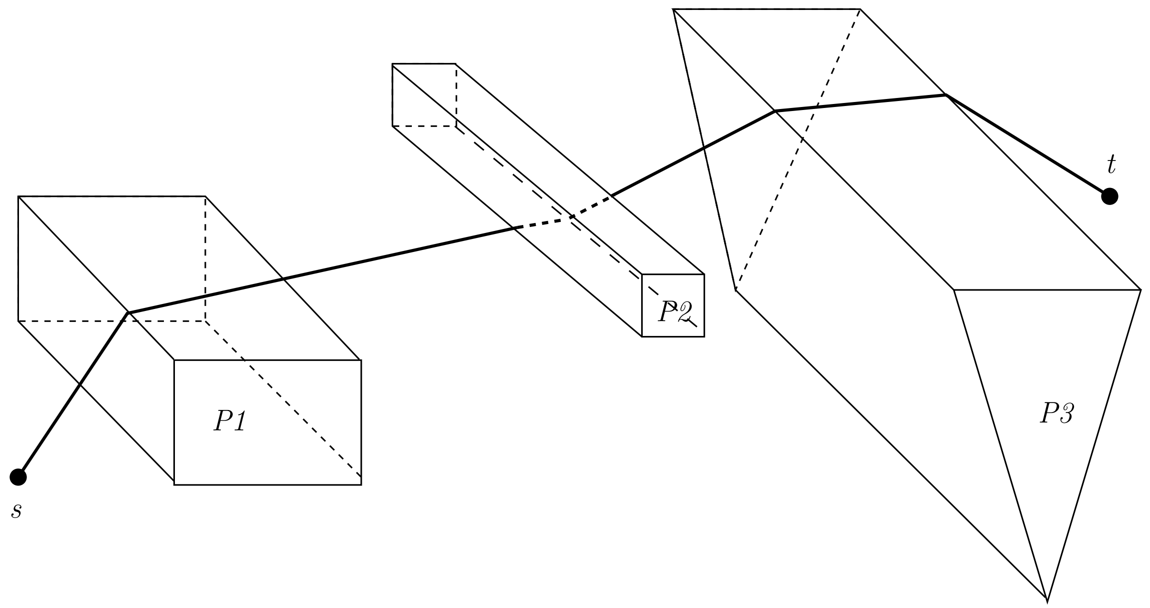
Polyeder-Szene in 3D

- Startpunkt s, Zielpunkt t
- Menge von Polyedern



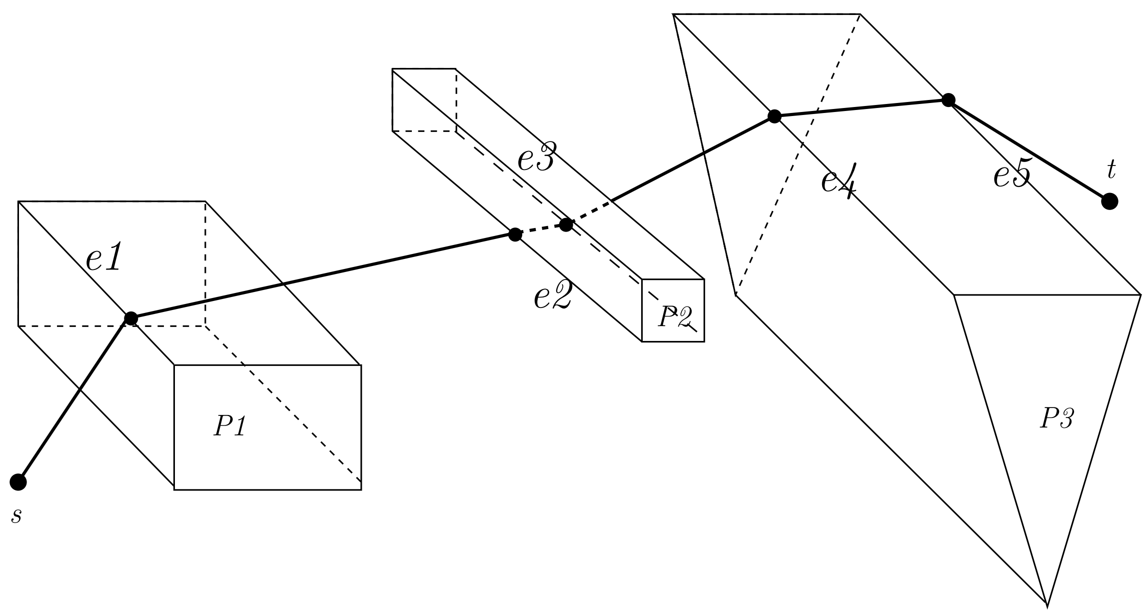
Polyeder-Szene in 3D

- Startpunkt s, Zielpunkt t
- Menge von Polyedern
- Kürzester Weg von s nach t:



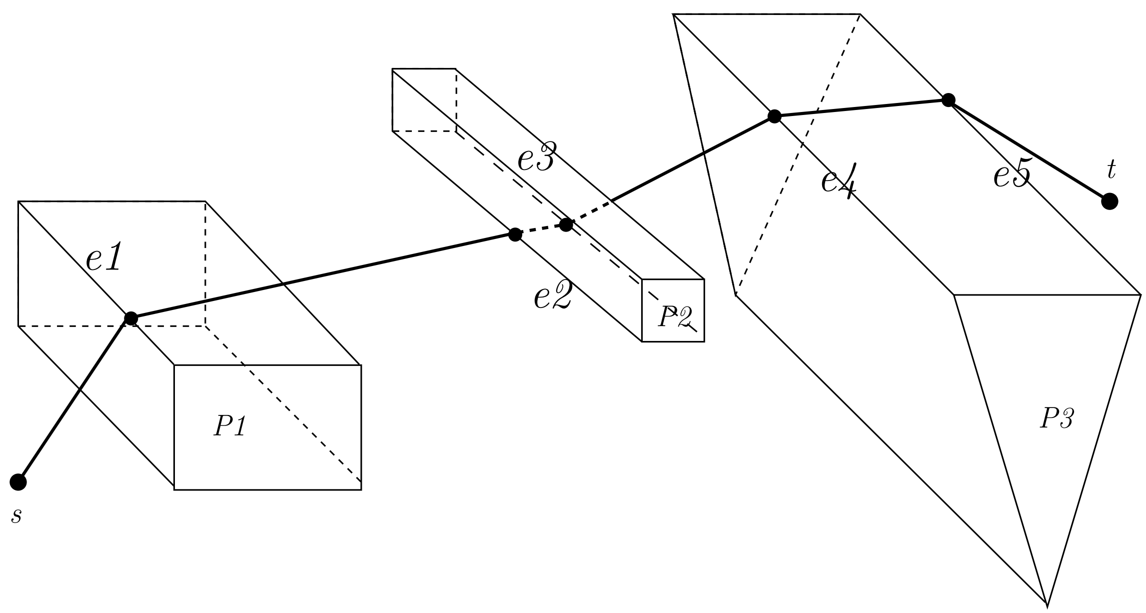
Polyeder-Szene in 3D

- Startpunkt s, Zielpunkt t
- Menge von Polyedern
- Kürzester Weg von s nach t:

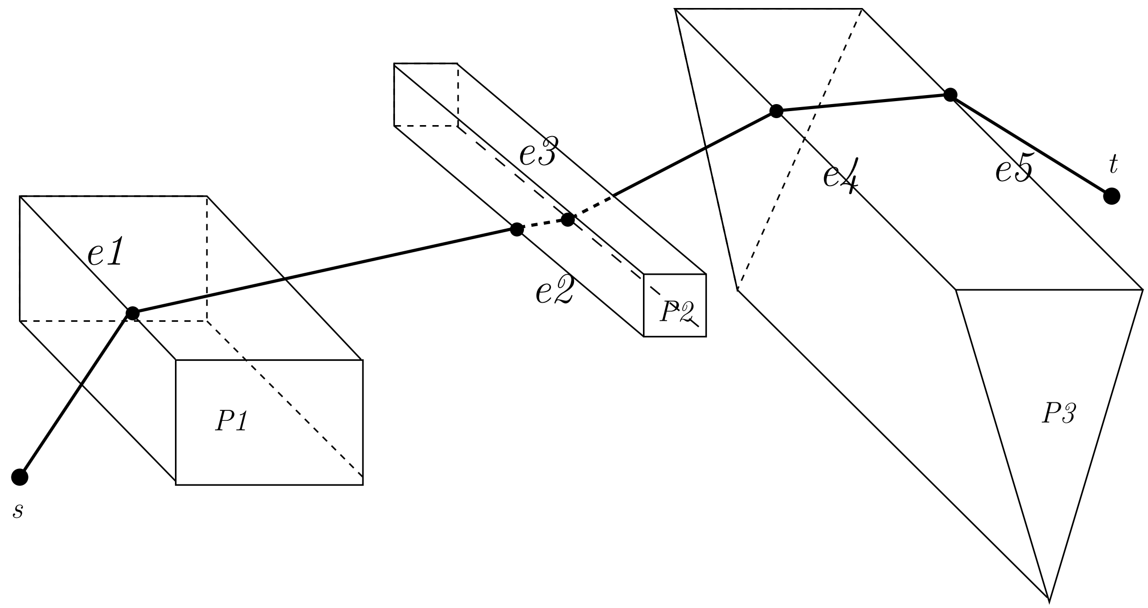


Polyeder-Szene in 3D

- Startpunkt s, Zielpunkt t
- Menge von Polyedern
- Kürzester Weg von s nach t: NP-hard

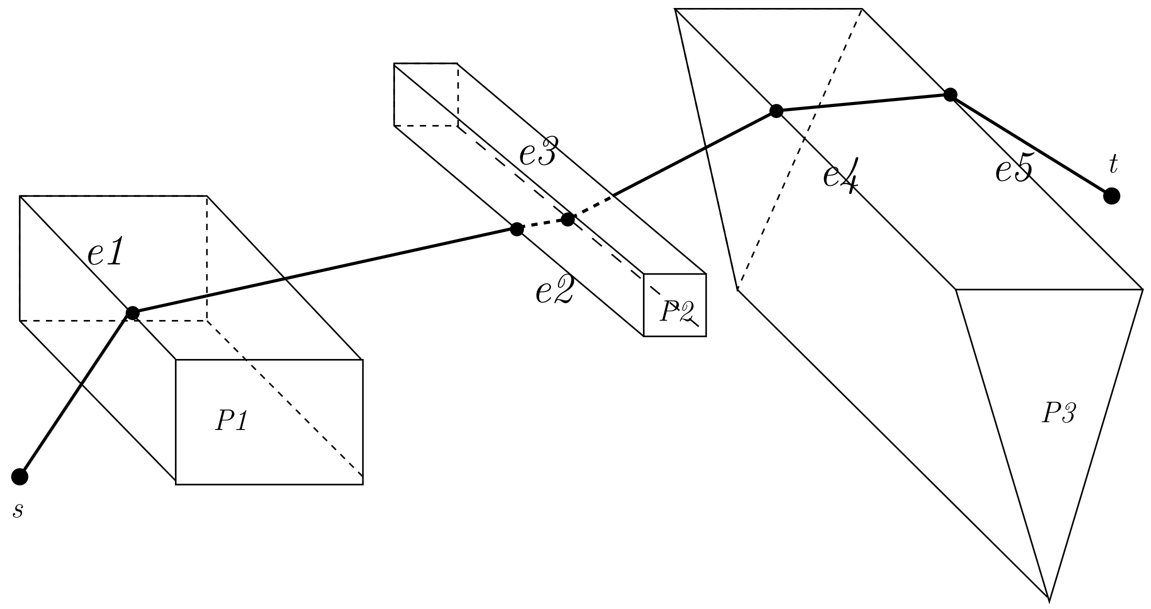


Polyeder-Szene in 3D



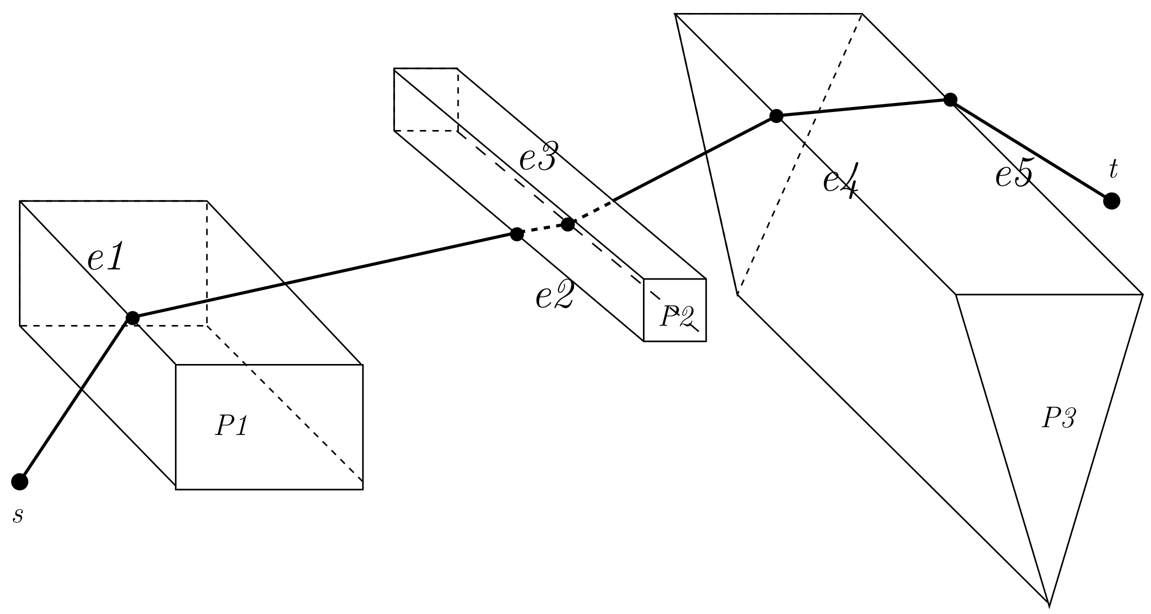
Polyeder-Szene in 3D

- Teilprobleme



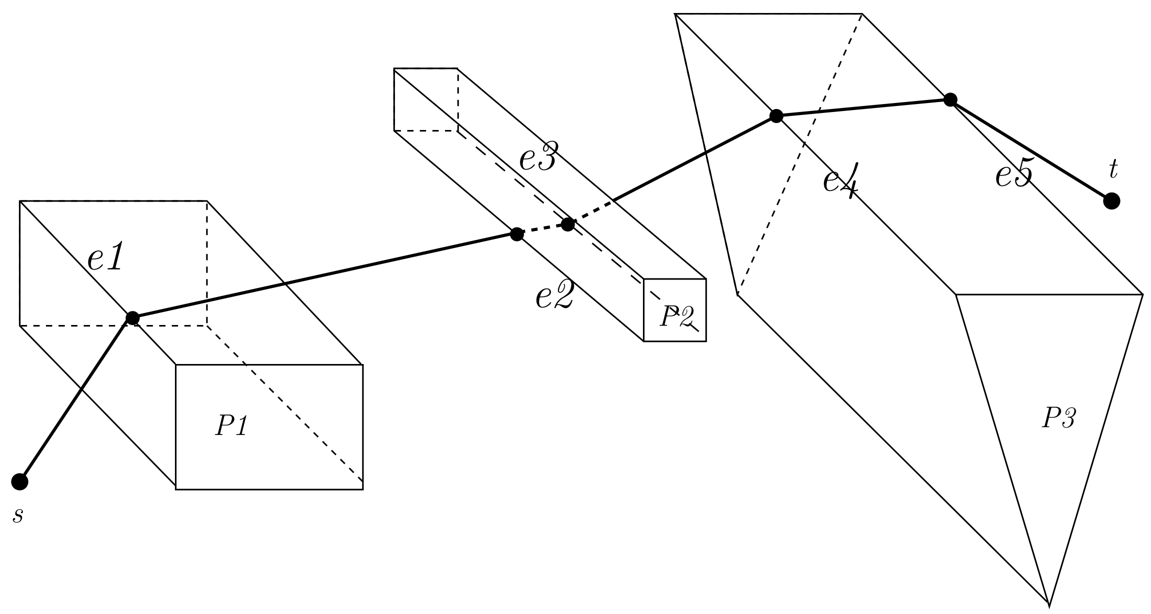
Polyeder-Szene in 3D

- Teilprobleme
- 1) Kantenreihenfolge



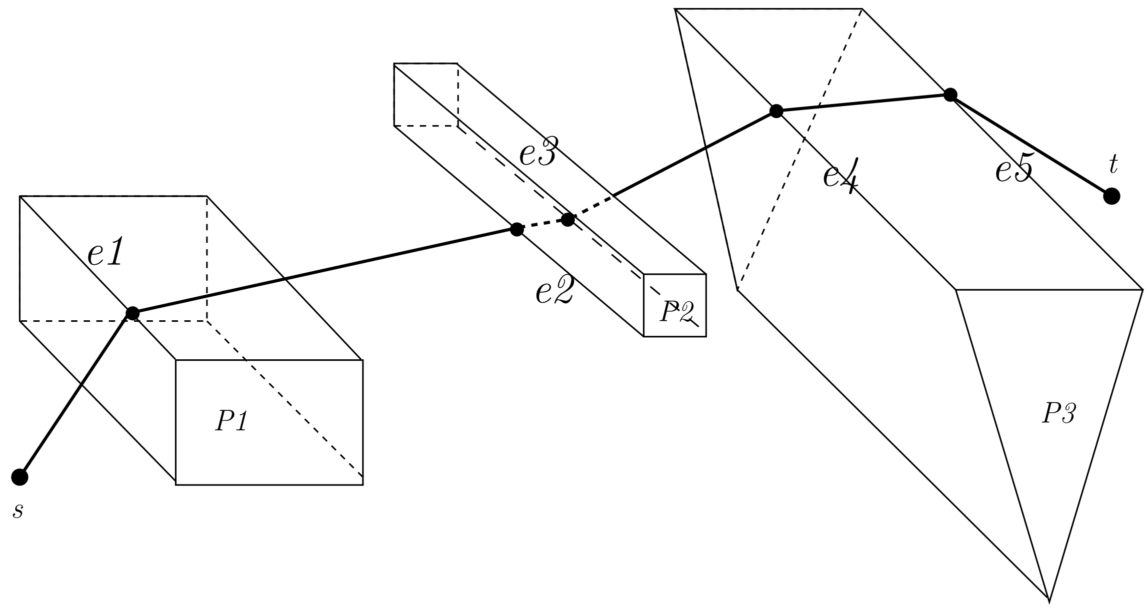
Polyeder-Szene in 3D

- Teilprobleme
- 1) Kantenreihenfolge
- 2) Verschiebung auf der Kante



Polyeder-Szene in 3D

- Teilprobleme
- 1) Kantenreihenfolge
- 2) Verschiebung auf der Kante
- Bereits 1) ist NP hard



Kantenreihenfolge: NP hard

Kantenreihenfolge: NP hard

- Entscheidungsproblem,

Kantenreihenfolge: NP hard

- Entscheidungsproblem, E-Problem mit Schranke,

Kantenreihenfolge: NP hard

- Entscheidungsproblem, E-Problem mit Schranke, Optimierungsproblem

Kantenreihenfolge: NP hard

- Entscheidungsproblem, E-Problem mit Schranke, Optimierungsproblem
- $S \subset \Omega$:

Kantenreihenfolge: NP hard

- Entscheidungsproblem, E-Problem mit Schranke, Optimierungsproblem
- $S \subset \Omega$: $x \in \Omega$:

Kantenreihenfolge: NP hard

- Entscheidungsproblem, E-Problem mit Schranke, Optimierungsproblem
- $S \subset \Omega$: $x \in \Omega$: gilt $x \in S$?

Kantenreihenfolge: NP hard

- Entscheidungsproblem, E-Problem mit Schranke, Optimierungsproblem
- $S \subset \Omega$: $x \in \Omega$: gilt $x \in S$?
- Problem S ist NP-vollständig

Kantenreihenfolge: NP hard

- Entscheidungsproblem, E-Problem mit Schranke, Optimierungsproblem
- $S \subset \Omega$: $x \in \Omega$: gilt $x \in S$?
- Problem S ist NP-vollständig

1. Liegt in NP

Kantenreihenfolge: NP hard

- Entscheidungsproblem, E-Problem mit Schranke, Optimierungsproblem
- $S \subset \Omega$: $x \in \Omega$: gilt $x \in S$?
- Problem S ist NP-vollständig

1. Liegt in NP
2. Jedes andere Problem $S' \in NP$ läßt sich auf S in polynomieller Zeit auf S *reduzieren*

Kantenreihenfolge: NP hard

- Entscheidungsproblem, E-Problem mit Schranke, Optimierungsproblem
- $S \subset \Omega$: $x \in \Omega$: gilt $x \in S$?
- Problem S ist NP-vollständig

1. Liegt in NP
2. Jedes andere Problem $S' \in NP$ läßt sich auf S in polynomieller Zeit auf S *reduzieren*

- NP hard: Nur zweiter Teil (Optimierungsprobleme)

Kantenreihenfolge: NP hard

- Entscheidungsproblem, E-Problem mit Schranke, Optimierungsproblem
- $S \subset \Omega$: $x \in \Omega$: gilt $x \in S$?
- Problem S ist NP-vollständig

1. Liegt in NP
2. Jedes andere Problem $S' \in NP$ läßt sich auf S in polynomieller Zeit auf S *reduzieren*

- NP hard: Nur zweiter Teil (Optimierungsprobleme)
- 3-SAT ist NP vollständig (Cook)