
Algorithmen und Berechnungskomplexität I WS 15/16

Universität Bonn, Institut für Informatik, Abteilung I

8. Aufgabenblatt zur Vorlesung

Abgabe: 15.12. (12³⁰)

Aufgabe 29: Bereichsanfragen (4 Punkte)

Eine Bereichsanfrage an einen *AVL*-Baum T besteht aus zwei Zahlen x und y , $x < y$. Es sollen in T alle Zahlen z berichtet werden mit $x \leq z \leq y$. Wir wollen in dieser Aufgabe zwei Möglichkeiten vergleichen, mit einem Blattsuchbaum Bereichsanfragen zu beantworten.

- a) In jedem Blatt wird ein Zeiger auf das Blatt mit dem nächstgrößten Schlüssel und ein Zeiger auf das Blatt mit dem nächstkleinsten Schlüssel gespeichert.
 - Wie müssen die Einfüge- und Löschoption modifiziert werden, so dass nach Einfügen oder Entfernen eines Schlüssels die Zeiger der Blätter auf die richtigen Elemente zeigen?
 - Wie kann mit diesem modifizierten *AVL*-Baum eine Bereichsanfrage beantwortet werden und in welcher Laufzeit?
 - Was ist der Speicherplatzbedarf für den modifizierten *AVL*-Baum?

- b) Für einen *AVL*-Baum ohne Modifikation betrachten wir folgenden Algorithmus. Berichte die Schlüssel s_x, s_y der Blätter v_x, v_y , in denen eine Suchanfrage in T nach x bzw. y endet genau dann, wenn $x \leq s_x \leq y$ bzw. $x \leq s_y \leq y$ gilt. Weiterhin, falls $v_x \neq v_y$: Laufe von der Wurzel von T aus die Suchpfade π_x und π_y nach x und y ab, bis diese sich in einem Knoten v aufteilen. Folglich gehört der linke Sohn v_l von v zu π_x und der rechte Sohn v_r zu π_y . Für alle Nachfahren w von v_l auf π_x , deren linker Sohn auf π_x liegt: Traversiere den rechten Teilbaum von w in Inorder-Reihenfolge und berichte die Schlüssel aller Blätter. Für alle Nachfahren w' von v_r auf π_y , deren rechter Sohn zu π_y gehört, berichte in Inorder-Reihenfolge die Schlüssel des linken Teilbaums von w' .
 - Begründen Sie, warum obiges Verfahren eine Bereichsanfrage korrekt beantwortet.

- Wie ist die Laufzeit zum Beantworten einer Bereichsanfrage?

Laufzeiten und Speicherplatz kann in der O -Notation angegeben werden. Für die Laufzeit- und Speicherplatzbetrachtungen bezeichnet n die Anzahl Schlüssel in T und k die Anzahl berichteter Zahlen.

Aufgabe 30: B-Baum - Einfügen (4 Punkte)

Gegeben ist ein leerer B-Suchbaum der Ordnung 2, wie er in der Vorlesung definiert wurde. Fügen Sie nacheinander die Schlüssel

F, S, Q, K, C, L, H, T, V, W, M, R, N, P, A, B, X, Y, D, G

in obiger Reihenfolge ein und dokumentieren Sie lediglich die Konfiguration des Baumes vor jedem Teilen eines Knotens und die finale Konfiguration.

Hinweis: Sie können jedes Blatt durch einen Punkt \cdot andeuten.

Aufgabe 31: B-Baum - Höhe (4 Punkte)

Nach Definition hat die Wurzel in einem B-Baum die Höhe 0. Zeigen Sie:

Für jeden B-Suchbaum der Ordnung $t \geq 2$ mit $n \geq 1$ Schlüsseln und Höhe h ist

$$h \leq 1 + \log_t \frac{n+1}{2}.$$

Hinweis: Überlegen Sie zunächst, wie viele Knoten der B-Baum mit Höhe h mindestens haben muss.

Aufgabe 32: Amortisierte Kosten (4 Punkte)

Betrachten Sie ein elektrisches Binärzählwerk mit beliebig vielen Ziffern aus $\{0, 1\}$. Das Umschalten einer Ziffer kostet eine Stromeinheit. Das Zählwerk ist mit 0 initialisiert und wird durch wiederholtes Inkrementieren auf n erhöht. Zeigen Sie, dass die entstandenen Gesamtkosten in $\Theta(n)$ liegen. Schließen Sie dann auf die amortisierten Kosten für eine einzelne Erhöhung des Zählers, indem Sie die Gesamtkosten durch n teilen.