Es stellen sich also weitere Fragen:

Frage 2 Wann gilt $\alpha \sim \beta$? Was haben α, β dann miteinander zu tun?

Frage 3 Wie kann man zu gegebenem α ein möglichst kurzes β finden mit $\alpha \sim \beta$?

Wir wollen versuchen, auf die Fragen 1 und 2 partielle Antworten zu geben.

(Zuvor notieren wir zwei offensichtliche Tatsachen

Lemma 23

(i) α gültig $\Rightarrow$ α erfüllbar

(ii) α gültig $\Leftrightarrow$ $\neg\alpha$ nicht erfüllbar.

$\boxed{\text{Lemma 23}}$)

4.2 Ein Spiel mit Ausdrücken (Kalkül der Aussagenlogik)

Beim Rechnen in Gruppen durften nur die Gruppenaxiome verwendet werden – sonst nichts.
Gruppentheoretiker akzeptieren nur solche Theoreme, die sich vollständig auf diese Axiome zurückführen lassen.

Geht das ganz allgemein mit logischen Aussagen auch?
Was heißt eigentlich "eine Aussage herleiten"?
Wann "folgt" etwas?

Machen wir uns von (möglicherweise trügerischen) inhaltlichen Überlegungen frei, und betrachten wir folgendes Spiel mit Zeichenreihen:

Sei Π eine höchstens abzählbare Menge Boole'scher Variablen $p, q, r, \ldots$ und $AL(\Pi)$ die Menge der Ausdrücke mit Variablen in Π, wie oben.

<u>Definition</u> (Aussagenlogischer Kalkül)

- Für alle α, β, γ in $AL(\Pi)$ darf man folgende Ausdrücke hinschreiben:

4 Axiome
$$\begin{cases} A1: & \alpha \vee \alpha \longrightarrow \alpha \\ A2: & \alpha \longrightarrow \alpha \vee \beta \\ A3: & \alpha \vee \beta \longrightarrow \beta \vee \alpha \\ A4: & (\alpha \to \beta) \longrightarrow (\gamma \vee \alpha \to \gamma \vee \beta) \end{cases}$$

Vereinfachung
Abschwächung
Kommutativität
$\vee$ von links

Regel
- Hat man schon α und $\alpha \to \beta$, so darf man auch β hinschreiben ("Modus Ponens")
- Andere Ausdrücke als diese hinzuschreiben, ist nicht erlaubt.

modus ponendo ponens
Schlussweise, die durch das Setzen einer Aussage eine andere setzt

<u>Definition</u>

- α heißt <u>herleitbar</u>, in Zeichen $\vdash \alpha$, falls man α in endlich vielen Schritten mit erlaubten Mitteln "hinschreiben" kann
- Sei $M \subseteq AL(\Pi)$. Dann heißt α <u>aus M herleitbar</u>, wenn man α in endlich vielen Schritten mit erlaubten Mitteln und Benutzung der Aussagen in M "hinschreiben" darf. In Zeichen: $M \vdash \alpha$

Wir betrachten eine Reihe von Beispielen, auf die wir später noch zurückgreifen werden.

Beispiel

Kettenschluß – Regel KS:

$$\{\alpha \to \beta,\ \beta \to \gamma\} \vdash \alpha \to \gamma$$

„Makro"

Beweis: durch Angabe einer Herleitung:

1. $\alpha \to \beta$ nach Voraussetzung
2. $\beta \to \gamma$ nach Voraussetzung
3. $(\beta \to \gamma) \to (\neg\alpha \vee \beta \to \neg\alpha \vee \gamma)$ Axiom A3
4. $\neg\alpha \vee \beta \to \neg\alpha \vee \gamma$ MP(2,3)

   $\equiv (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)$ Def $\to$
5. $\alpha \to \gamma$ MP(1,4).

per Induktion kann man leicht zeigen:

$$\{\alpha_1 \to \alpha_2,\ \alpha_2 \to \alpha_3, \ldots, \alpha_{n-1} \to \alpha_n\} \vdash \alpha_1 \to \alpha_n.$$

$\to$ Regel (1) $\vdash \alpha \to \alpha$

Beweis:
1. $\alpha \to \alpha \vee \alpha$ A2
2. $\alpha \vee \alpha \to \alpha$ A1
3. $\alpha \to \alpha$ KS(1,2)

$\to$ Regel (2) $\{\alpha\} \vdash \beta \to \alpha$ (Beweis S. 139.1)

erst

$\vee$ Regeln (1) $\{\alpha \to \beta\} \vdash \alpha \to \beta \vee \gamma$

$\vdash \alpha \to \gamma \vee \beta$

(abgeschwächte Folgerung)

(erst diese, dann $\to$ Regeln 3, 4, 5)

Beweis:
1. $\alpha \to \beta$ nach Vorauss.
2. $\beta \to \beta \vee \gamma$ A2
3. $\alpha \to \beta \vee \gamma$ KS(1,2) erste Beh.
4. $\beta \vee \gamma \to \gamma \vee \beta$ A3
5. $\alpha \to \gamma \vee \beta$ KS(3,4) zweite Beh.

„Makros"

$\rightarrow$ Regel (2) : $\{\alpha\} \vdash \beta \rightarrow \alpha$

Beweis

1.	α	nach Vor.
2.	$\alpha \rightarrow \alpha \vee \neg\beta$	A2
3.	$\alpha \vee \neg\beta \rightarrow \neg\beta \vee \alpha$	A3
4.	$\alpha \rightarrow \neg\beta \vee \alpha$	KS (2, 3)
5.	$\neg\beta \vee \alpha$	MP (1,4)
	$\equiv \beta \rightarrow \alpha$	

jetzt erst $\rightarrow$ Regel (3)

Leider benötigen wir später noch eine Regel, deren Beweis etwas länglich ist:

$\rightarrow$ Regel (5) $\{\alpha \rightarrow \beta,\ \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)\} \vdash \alpha \rightarrow \gamma$

Beweis

1.	$\alpha \rightarrow \beta$	nach Vor.
2.	$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$	nach Vor.
3.	$\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$	$\rightarrow$ Regel(3) : 2
4.	$\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$	KS (1, 3)
5.	$\alpha \rightarrow \gamma$	$\rightarrow$ Regel (4) : 4

$\rightarrow$ Regel (4) $\{\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)\} \vdash \alpha \rightarrow \beta$

Beweis

1.	$\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$	nach Vor.
	$\equiv \neg\alpha \vee (\neg\alpha \vee \beta)$	
2.	$(\neg\alpha \vee \neg\alpha) \vee \beta$	$\vee$ Regel(4) : 1
3.	$\neg\alpha \vee \neg\alpha \rightarrow \neg\alpha$	A1
4.	$(\neg\alpha \vee \neg\alpha) \vee \beta \rightarrow \neg\alpha \vee \beta$	$\vee$ Regeln(2) : 3
5.	$\neg\alpha \vee \beta$	MP (2, 4)
	$\equiv \alpha \rightarrow \beta$	

$\rightarrow$ Regel (3) $\quad \{\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)\} \vdash \underbrace{\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)}_{\neg\beta \vee (\neg\alpha \vee \gamma)}$

Beweis

1. $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$ — nach Vor.

$\equiv \neg\alpha \vee (\neg\beta \vee \gamma)$

2. $(\neg\alpha \vee \neg\beta) \vee \gamma$ — $\vee$Regel(4) : 1

3. $\neg\alpha \vee \neg\beta \rightarrow \neg\beta \vee \neg\alpha$ — A3

4. $(\neg\alpha \vee \neg\beta) \vee \gamma \rightarrow (\neg\beta \vee \neg\alpha) \vee \gamma$ — $\vee$Regeln (2) : 3

5. $(\neg\beta \vee \neg\alpha) \vee \gamma$ — MP (2, 4)

6. $\neg\beta \vee (\neg\alpha \vee \gamma)$ — $\vee$Regel 4 : 5

$\equiv \beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$

$\vee$ Regeln (2) $\{\alpha \to \beta\} \vdash \gamma \vee \alpha \to \gamma \vee \beta$ " $\to$ " ist A4

$\vdash \alpha \vee \gamma \to \beta \vee \gamma$ statt $\vdash$

Beweis:

1.	$\alpha \to \beta$	nach Vor.
2.	$(\alpha \to \beta) \to (\gamma \vee \alpha \to \gamma \vee \beta)$	A4
3.	$\gamma \vee \alpha \to \gamma \vee \beta$	MP(1,2) erste Beh.
4.	$\alpha \vee \gamma \to \gamma \vee \alpha$	A3
5.	$\alpha \vee \gamma \to \gamma \vee \beta$	KS(4,3)
6.	$\gamma \vee \beta \to \beta \vee \gamma$	A3
7.	$\alpha \vee \gamma \to \beta \vee \gamma$	KS(5,6) zweite Beh.

$\vee$ Regel (3) $\{\alpha \to \gamma, \beta \to \gamma\} \vdash \alpha \vee \beta \to \gamma$

Beweis:

1.	$\alpha \to \gamma$	nach Vorauss.
2.	$\beta \to \gamma$	nach Vorauss.
3.	$\alpha \vee \beta \to \gamma \vee \beta$	$\vee$ Regeln(2) : 1
4.	$\gamma \vee \beta \to \gamma \vee \gamma$	$\vee$ Regeln (2) : 2
5.	$\alpha \vee \beta \to \gamma \vee \gamma$	KS (3,4)
6.	$\gamma \vee \gamma \to \gamma$	A1
7.	$\alpha \vee \beta \to \gamma$	KS (5,6)

⟨Später $\vee$ Regel (4) einschieben⟩ p 140.1

$\neg$ Regel (1) $\{\alpha, \neg\alpha\} \vdash \beta$ ex falso quodlibet

Beweis:

1.	α	nach Vorauss.
2.	$\neg\alpha$	nach Vorauss.
3.	$\neg\alpha \to \neg\alpha \vee \beta$	A2
4.	$\neg\alpha \vee \beta$	MP (2,3)
$\equiv$	$\alpha \to \beta$	
5.	β	MP (1,4)

140.1

∨ Regeln (4)

$\{\alpha \vee (\beta \vee \gamma)\} \vdash (\alpha \vee \beta) \vee \gamma$

$\{(\alpha \vee \beta) \vee \gamma\} \vdash \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$

Assoziativität von ∨ (bei Herleitbarkeit)

Beweis

1.	$\alpha \vee (\beta \vee \gamma)$	nach Vor.
2.	$\alpha \to \alpha \vee \beta$	A2
3.	$\alpha \vee \beta \to (\alpha \vee \beta) \vee \gamma$	A2
4.	$\alpha \to (\alpha \vee \beta) \vee \gamma$	KS (2,3)
5.	$\beta \to \beta \vee \alpha$	A2
6.	$\beta \vee \alpha \to \alpha \vee \beta$	A3
7.	$\beta \to \alpha \vee \beta$	KS(5,6)
8.	$\beta \vee \gamma \to (\alpha \vee \beta) \vee \gamma$	∨ Regeln (2) : 7
9.	$\alpha \vee (\beta \vee \gamma) \to (\alpha \vee \beta) \vee \gamma$	∨ Regel (3) : 4, 8
10.	$(\alpha \vee \beta) \vee \gamma$	MP (1, 9)

zweiter Teil analog $\triangle$

$\neg$ Regeln (2) $\quad \{\neg\alpha \to \alpha\} \vdash \alpha$

$\{\alpha \to \neg\alpha\} \vdash \neg\alpha$

Beweis:

1.	$\neg\alpha \to \alpha$	nach Vorauss.
2.	$\alpha \to \alpha$	$\to$ Regel (1)
3.	$\neg\alpha \vee \alpha \to \alpha$ $\equiv (\alpha \to \alpha) \to \alpha$	$\vee$ Regel (3) : 1,2
4.	α	MP (2, 3) erste Beh.

zweite Beh. analog.

$\neg$ Regel (3) $\quad \{\neg\alpha, \neg\beta, \alpha \vee \beta\} \vdash \gamma$

ex falso quodlibet de luxe

Beweis

1.	$\neg\alpha$	nach Vor.
2.	$\neg\beta$	nach Vor.
3.	$\alpha \vee \beta$	nach Vor.
4.	$\neg\alpha \to \neg\alpha \vee \gamma$	A2
5.	$\neg\beta \to \neg\beta \vee \gamma$	A2
6.	$\neg\alpha \vee \gamma$ $\equiv \alpha \to \gamma$	MP (1,4)
7.	$\neg\beta \vee \gamma$ $\equiv \beta \to \gamma$	MP (2,5)
8.	$\alpha \vee \beta \to \gamma$	$\vee$ Regel (3)
9.	γ	MP (3,8)

Beweisen wird hier zum "Aneinanderlegen" passender Zeichenreihen. Hat das irgendetwas mit inhaltlichem Beweisen zu tun?

Was bedeutet es denn, daß eine Aussage "inhaltlich" aus anderen Aussagen folgt?

AL:

$$\alpha \vee \alpha \to \alpha$$
$$\alpha \to \alpha \vee \beta$$
$$\alpha \vee \beta \to \beta \vee \alpha$$
$$\alpha \to \gamma \to (\gamma \vee \alpha \to \gamma \vee \beta)$$

$+ \quad \dfrac{\alpha \to \beta \quad \alpha}{\beta}$ MP

hatten untersucht: $\underbrace{M}_{\text{evtl. } \phi} \vdash \alpha$

und folgende Regeln hergeleitet:

$\to$:

$\vdash \alpha \to \alpha$

$\{\alpha\} \vdash \beta \to \alpha$

$\{\alpha \to (\beta \to \gamma)\} \vdash \beta \to (\alpha \to \gamma)$

$\{\alpha \to (\alpha \to \beta)\} \vdash \alpha \to \beta$

$\left\{\begin{matrix} \alpha \to \beta \\ \alpha \to (\beta \to \gamma) \end{matrix}\right\} \vdash \alpha \to \gamma$

$\vee$:

$\{\alpha \to \beta\} \vdash \alpha \to \beta \vee \gamma$
$\qquad\qquad\;\; \alpha \to \gamma \vee \beta$

$\{\alpha \to \beta\} \vdash \gamma \vee \alpha \to \gamma \vee \beta$
$\qquad\qquad\;\; \alpha \vee \gamma \to \beta \vee \gamma$

$\left\{\begin{matrix} \alpha \to \beta \\ \beta \to \gamma \end{matrix}\right\} \vdash \alpha \vee \beta \to \gamma$

$\{\alpha \vee (\beta \vee \gamma)\} \vdash (\alpha \vee \beta) \vee \gamma$

$\{(\alpha \vee \beta) \vee \gamma\} \vdash \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$

$\neg$:

$\{\alpha, \neg\alpha\} \vdash \beta$

$\{\neg\alpha \to \alpha\} \vdash \alpha$

$\{\alpha \to \neg\alpha\} \vdash \neg\alpha$

$\{\neg\alpha, \neg\beta, \alpha \vee \beta\} \vdash \gamma$

<u>Definition</u> Sei $M \subseteq A(\Pi)$ und $\alpha \in A(\Pi)$.

Wir sagen, α folgt aus M, in Zeichen $M \models \alpha$,
falls gilt:

$$\forall \mathcal{B} \text{ Bewertung von } \Pi : \Big(\big(\underbrace{\forall \beta \in M : \mathcal{B}(\beta) = w}_{\text{d.h. } \mathcal{B}(M) = w} \big) \Rightarrow \mathcal{B}(\alpha) = w \Big)$$

<u>Beispiele</u> (i) α gültig (= Tautologie) $\Longleftrightarrow$ $\emptyset \models \alpha$

dafür schreiben wir einfach $\models \alpha$

(ii) $\{\alpha \to \beta, \beta \to \gamma\} \models \alpha \to \gamma$ ← bitte nachrechnen

ex falso quodlibet

(iii) $\{\alpha, \neg\alpha\} \models \beta$ ⚠

Es gibt keine Bewertung $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{B}(\alpha) = w = \mathcal{B}(\neg\alpha)$.
Deshalb ist die Aussage richtig, daß für jedes solche $\mathcal{B}$ auch $\mathcal{B}(\beta) = w$ ist.

(iv) Offenbar gilt $\models \xi$ für jeden Ausdruck ξ in den Axiomen A1 – A4.

Nun haben wir zwei "Folgerungs-" Begriffe:

$M \vdash \alpha$	$M \models \alpha$
syntaktisch, über Kalkül definiert	semantisch, über Bewertungen definiert

<u>Frage:</u> Wie hängen $\vdash$ und $\models$ zusammen?

<u>Antwort:</u> Sie sind gleich!! Das heißt, für alle M und α gilt:

$$M \vdash \alpha \Longleftrightarrow M \models \alpha$$

3 Zeichen, die unterschiedlich definiert sind.

Das soll nun im folgenden bewiesen werden.
Wir beginnen mit der einfachen Richtung.

Theorem 15 (Korrektheitssatz des Aussagenkalküls)

$\forall M \subseteq AL(\Pi)\ \forall \alpha \in AL(\Pi)$:

$$M \vdash \alpha \implies M \models \alpha .$$

was im Kalkül herleitbar ist, folgt auch inhaltlich

Beweis Gelte $M \vdash \alpha$, und sei $\mathcal{B}$ eine Bewertung von Π mit $\mathcal{B}(M) = W$. Zu zeigen ist: $\mathcal{B}(\alpha) = W$.

Die Herleitung $M \vdash \alpha$ bestehe aus den Zwischenschritten

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n = \alpha .$$

Wir zeigen per Induktion, daß für jedes m mit $1 \le m \le n$

$$\mathcal{B}(\alpha_m) = W$$

ist, daraus folgt für $m = n$ die Behauptung.

Induktionsanfang Sei $m = 1$.

Ist $\alpha_1 \in M$, so folgt $\mathcal{B}(\alpha_1) = W$ nach Voraussetzung über $\mathcal{B}$.

Ist α_1 ein Ausdruck aus einem der Axiome A1–A4, so gilt für jede Bewertung $\mathcal{B}$, daß $\mathcal{B}(\alpha_1) = W$ ist, denn diese Ausdrücke sind gültig (siehe (iv), S. 142)

wegen $m = 1$ sind das alle Möglichkeiten.

Induktionsschritt Sei jetzt $m \le n-1$, und gelte $\mathcal{B}(\alpha_\mu) = W$ für alle $\mu \le m$.

Ist $\alpha_{m+1} \in M$ oder Ausdruck eines Axioms A1–A4, so folgt $\mathcal{B}(\alpha_{m+1}) = W$ wie im Induktionsanfang.

Wenn aber α_{m+1} durch Anwendung von MP auf zwei frühere Ausdrücke α_μ, α_ν mit $\mu, \nu \le m$ entsteht, so wissen wir, daß α_ν und α_{m+1} die Gestalt

$$\alpha_\nu \equiv \alpha_\mu \to \beta \;, \qquad \alpha_{m+1} \equiv \beta$$

haben müssen.

Nach Induktionsvoraussetzung gilt: $B(\alpha_\mu) = W$ und

$$B(\neg\alpha_\mu \vee \underset{\alpha_{m+1}}{\underset{\shortparallel}{\beta}}) \underset{\text{Def.}\to}{=} B(\alpha_\mu \to \underset{\alpha_{m+1}}{\underset{\shortparallel}{\beta}}) = B(\alpha_\nu) = W$$

Nach den Wahrheitstafeln auf S. 134 muß $B(\beta) = W$ sein, also folgt aus $\beta \equiv \alpha_{m+1}$ (MP!), daß $B(\alpha_{m+1}) = W$ ist.

$\boxed{\text{Theorem 15}}$

Als Vorbereitung für den Beweis der anderen Richtung zeigen wir folgende Tatsache:

für $M = \emptyset$: $\alpha \vdash \beta \Rightarrow \;\vdash \alpha \to \beta$

<u>Lemma 24</u> ("Deduktionstheorem")

$$M \cup \{\alpha\} \vdash \beta \quad \Longrightarrow \quad M \vdash \alpha \to \beta$$

<u>Beweis</u> Ähnlich wie beim Beweis des Korrektheitssatzes betrachten wir eine Herleitung $\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_n = \beta$ aus $M \cup \{\alpha\}$.

Per Induktion wird gezeigt:

Für jedes m, $1 \le m \le n$, gilt $M \vdash \alpha \to \alpha_m$.

(daraus folgt für $m = n$ wieder die Behauptung).

<u>Induktionsanfang</u> Sei $m = 1$.

Ist $\alpha_1 \equiv \alpha$, so gilt $\vdash \alpha \to \alpha$ nach $\to$ Regel(1), S. 139,

also erst recht $M \vdash \alpha \to \alpha \equiv \alpha \to \alpha_1$.

Ist $\alpha_1 \in M$, so gilt $M \vdash \alpha_1 \vdash \alpha \to \alpha_1$ nach $\to$ Regel(2).

Ist α_1 Formel eines Axioms, so gilt $\vdash \alpha_1$, also erst recht

$M \vdash \alpha_1 \vdash \alpha \to \alpha_1$ wie zuvor.

$\to$ Regel(2)

Schließen oft formal
wird jetzt untersucht

Π : Menge Boolescher Variablen ← Elementaraussagen; Bedeutung unerheblich

$AL(\Pi)$: aussagenlogische Ausdrücke mit Var. in Π

$\neg(p \vee \neg q) \vee r$: $\neg$, $(\alpha \vee \beta)$

Denken uns Π als endlich (oder abzählbar unendl.)

Induktionsprinzip für $AL(\Pi)$

Abkürzungen:
$$(\alpha \wedge \beta) := \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$$
$$(\alpha \rightarrow \beta) := (\neg\alpha \vee \beta)$$
$$(\alpha \leftrightarrow \beta) := ((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha))$$

Klammerersparnis $\neg$ vor $\wedge, \vee$ vor $\rightarrow, \leftrightarrow$

Bewertungen von Π auf $A(\Pi)$ fortsetzen
erfüllbar — gültig ⚠

Test: Wahrheitstafeln ausprobieren: lästig

$\alpha \sim \beta$:⟺ $\forall B$ Bewertungen $B(\alpha) = B(\beta)$

α kann lang sein, β kurz. Wie findet man kurzes β? ③

② Wann gilt $\alpha \sim \beta$?
① Wann ist α erfüllbar / gültig?

Aussagenlogischer Kalkül

$A_1: \quad \alpha \vee \alpha \to \alpha$

$A_2: \quad \alpha \to \alpha \vee \beta$

$A_3: \quad \alpha \vee \beta \to \beta \vee \alpha$

$A_4: \quad (\alpha \to \beta) \to (\gamma \vee \alpha \to \gamma \vee \beta)$

Axiome; darf man immer hinschreiben

Regel: Modus Ponens
$$\frac{\alpha \qquad \alpha \to \beta}{\beta}$$

$(M) \vdash \alpha$: α ist herleitbar (aus M)

syntaktischer Begriff

Beispiel: $\{\alpha, \neg\alpha\} \vdash \beta$ "ex falso quodlibet"

1. α nach Vor.
2. $\neg\alpha$ nach Vor.
3. $\neg\alpha \to \neg\alpha \vee \beta$ A2
4. $\neg\alpha \vee \beta$ MP (2,3)
   $= \alpha \to \beta$
5. β MP (1,4)

Semantischer Begriff

$(M) \models \alpha$: α gültig (folgt aus M)

falls gilt: $\forall$ B Bewertungen $B(M) = w \Rightarrow B(\alpha) = w$

Theorem $\forall M, \alpha$: $M \vdash \alpha \iff M \models \alpha$

"$\Rightarrow$" Korrektheitssatz; schon gezeigt

"$\Leftarrow$" Vollständigkeitssatz; kommt gleich benötigt als Hilfsmittel

Lemma 24 : Deduktionstheorem

$$M \cup \{\alpha\} \vdash \beta \quad \Rightarrow \quad M \vdash \alpha \to \beta$$

schon gezeigt

<u>Induktionsschritt</u> Sei $m \leq n-1$, und gelte $M \vdash \alpha \to \alpha_\mu$ für alle $1 \leq \mu \leq m$. Zu zeigen ist: $M \vdash \alpha \to \alpha_{m+1}$

Wenn $\alpha_{m+1} \equiv \alpha$ oder $\alpha_{m+1} \in M$ oder α_{m+1} aus einem Axiom stammt, so folgt die Behauptung wie im Induktionsanfang. Sei also α_{m+1} mit MP aus α_μ und α_ν mit $\mu, \nu \leq m$. Wieder folgt

$$\alpha_\nu \equiv \alpha_\mu \to \beta \quad \text{und} \quad \beta \equiv \alpha_{m+1}.$$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$M \vdash \alpha \to \alpha_\mu \quad \text{und} \quad M \vdash \alpha \to \alpha_\nu \equiv \alpha \to (\alpha_\mu \to \beta).$$

$\to$Regel (5), S. 139.1, besagt

$$\{\alpha \to \alpha_\mu, \alpha \to (\alpha_\mu \to \beta)\} \vdash \alpha \to \beta \equiv \alpha \to \alpha_{m+1}.$$

Damit ist die Behauptung auch für $m+1$ bewiesen.

$\boxed{\text{Lemma 24}}$

Nun folgt die schwierigere Richtung beim Vergleich von $\vdash$ mit $\models$:

<u>Theorem 16</u> (Vollständigkeitssatz der Aussagenlogik; K. Gödel)

$\forall N \subseteq AL(\Pi) \quad \forall \alpha \in AL(\Pi)$:

$$N \models \alpha \quad \Longrightarrow \quad N \vdash \alpha.$$

<u>Beweis</u> Wir nennen eine Menge $M \subseteq AL(\Pi)$ kontradiktorisch, falls sich alles daraus herleiten läßt, d.h. falls gilt:

$$\forall \alpha: \quad M \vdash \alpha.$$

Diese Eigenschaft kann man auch anders beschreiben:

<u>Beh 1</u> M kontradiktorisch $\Longleftrightarrow \exists \alpha: \; M \vdash \alpha, \neg\alpha$

<u>Bew 1</u> "$\Longrightarrow$" folgt direkt aus der Definition von "kontradiktorisch".

"$\Longleftarrow$" Nach $\neg$Regel (1), S. 140, gilt $\{\alpha, \neg\alpha\} \vdash \beta$ für beliebige Ausdrücke β. Wegen $M \vdash \alpha, \neg\alpha \vdash \beta$ ist also M kontradiktorisch. $\boxed{1}$

Die wesentliche Tatsache ist nun die folgende:

<u>Lemma 25</u> M nicht kontradiktorisch

$\Longrightarrow$ es gibt Bewertung $\mathcal{B}$ von Π mit $\mathcal{B}(M) = W$,

d.h. $\forall \gamma \in M: \; \mathcal{B}(\gamma) = W$.

Wir zeigen zunächst, wie Theorem 16 aus Lemma 25 folgt. Seien also $N \subseteq AL(\Pi)$, $\alpha \in AL(\Pi)$, und gelte

$$(*) \qquad N \models \alpha. \qquad \left(\text{Zu zeigen: } N \vdash \alpha\right)$$

Dann muß $N \cup \{\neg\alpha\}$ kontradiktorisch sein!

Denn wegen Lemma 25 gäbe es sonst eine Bewertung $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{B}(N \cup \{\neg\alpha\}) = W$, also $\mathcal{B}(N) = W$ und $\mathcal{B}(\alpha) = F$, im Widerspruch zu $(*)$.

Weil $N \cup \{\neg\alpha\}$ kontradiktorisch ist, folgt nach Definition:

$$N \cup \{\neg\alpha\} \vdash \alpha \quad \underset{\substack{\text{Lemma 24} \\ \text{S. 147} \\ \text{(Deduktionstheorem)}}}{\Longrightarrow} \quad N \vdash \neg\alpha \to \alpha \quad \underset{\substack{\neg\text{Regeln (2)} \\ \text{S. 141}}}{\vdash} \quad \alpha$$

Also gilt $N \vdash \alpha$, und Theorem 16 wäre damit bewiesen.
Es bleibt aber noch der

<u>Beweis von Lemma 25</u> (M nicht kontradiktorisch $\Rightarrow \exists\, \mathcal{B}: \mathcal{B}(M) = w.$)

Nach Lemma 23, S. 132, gibt es eine Abzählung $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ aller Ausdrücke in $AL(\pi)$.

Wir wollen durch sukzessives Hinzunehmen der α_i zu M eine maximale nicht-kontradiktorische Menge konstruieren.
Dazu definieren wir rekursiv

$$M_0 := M$$

$$M_{n+1} := \begin{cases} M_n, & \text{falls } M_n \cup \{\alpha_n\} \text{ kontradiktorisch} \\ M_n \cup \{\alpha_n\}, & \text{falls nicht} \end{cases}$$

und setzen

$$M^* := \bigcup_{n=0}^{\infty} M_n .$$

Klar: $M = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \ldots \subseteq M_n \subseteq M_{n+1} \subseteq \ldots \subseteq M^*$

<u>Beh2:</u> Für kein n ist M_n kontradiktorisch.

<u>Bew2:</u> folgt direkt aus der Definition der M_n per Induktion: $M_0 = M$ ist nicht kontradiktorisch, und das vererbt sich von M_n auf M_{n+1}.

<u>Beh 3</u> M^* ist nicht kontradiktorisch

<u>Bew 3</u> Sonst gäbe es ein α mit $M^* \vdash \alpha, \neg\alpha$

Eine endliche Herleitung kann nur endlich viele Ausdrücke aus M^* benutzen. Wählt man n groß genug, so liegen sie alle in M_n. Also:

$$M_n \vdash \alpha, \neg\alpha$$

$\underset{\text{Beh 1}}{\Rightarrow}$ M_n kontradiktorisch ↯ Widerspruch zu Beh 2.

$\boxed{3}$

M^* wird aber kontradiktorisch, wenn man irgendeinen Ausdruck hinzunimmt:

<u>Beh 4</u> $\alpha \notin M^* \Rightarrow M^* \cup \{\alpha\}$ kontradiktorisch

<u>Bew 4</u> Sei $\alpha \equiv \alpha_n$ in der Aufzählung aller Ausdrücke.

$\alpha_n \notin M^* \Rightarrow$ α_n wurde bei Konstruktion von M_{n+1} nicht aufgenommen

$\Rightarrow$ $M_n \cup \{\alpha_n\}$ war kontradiktorisch

$\Rightarrow$ $M^* \cup \{\alpha_n\}$ ist erst recht kontradiktorisch

$\boxed{4}$

<u>Beh 5</u> $\alpha \in M^* \Leftrightarrow M^* \vdash \alpha$

<u>Bew 5</u> "$\Rightarrow$" ist trivial.

"$\Leftarrow$" Angenommen, $\alpha \notin M^*$ $\underset{\text{Beh 4}}{\Rightarrow}$ $M^* \cup \{\alpha\}$ kontradiktorisch

$\underset{\text{Def.}}{\Rightarrow}$ $M^* \cup \{\alpha\} \vdash \neg\alpha$ $\underset{\substack{\text{Lemma 24,} \\ \text{S. 144} \\ \text{(Deduktionstheorem)}}}{\Rightarrow}$ $[M^* \vdash \alpha \to \neg\alpha]$

$\Rightarrow$ $M^* \vdash \alpha \to \neg\alpha$ $\underset{\substack{\neg\text{Regel (2)} \\ \text{S. 141}}}{\vdash}$ $\neg\alpha$

Bis auf $\neg$ gleich zu 146 - oben

Weil nach Voraussetzung $M^* \vdash \alpha$ gilt, haben wir

$$M^* \vdash \alpha, \neg\alpha \underset{\text{Beh 1}}{\Longrightarrow} M^* \text{ kontradiktorisch} \; \lightning_{\text{Beh 3}}$$

$\boxed{5}$

Beh 6 $\quad \neg\alpha \in M^* \iff \alpha \notin M^*$

Bew 6 $\quad$ indirekt.

Wären $\alpha, \neg\alpha$ beide in M^*, so wäre M^* kontradikt. $\lightning$ Beh 3

Wären $\alpha, \neg\alpha$ beide nicht in M^*, so würde aus Beh 4 folgen:

$$M^* \cup \{\alpha\} \text{ kontradikt.} \Rightarrow M^* \cup \{\alpha\} \vdash \neg\alpha$$

$$\underset{\substack{\text{Lemma 24} \\ \text{Ded. Thm.}}}{\Longrightarrow} M^* \vdash \alpha \to \neg\alpha \underset{\substack{\neg\text{Regel}(2) \\ \text{S. 141}}}{\vdash} \neg\alpha$$

wie oben

$$M^* \cup \{\neg\alpha\} \text{ kontradikt.} \Rightarrow M^* \cup \{\neg\alpha\} \vdash \alpha$$

$$\underset{\text{Lemma 24}}{\Longrightarrow} M^* \vdash \neg\alpha \to \alpha \underset{\neg\text{Regel}(2)}{\vdash} \alpha$$

insgesamt also

$$M^* \vdash \alpha, \neg\alpha \underset{\text{Beh 1}}{\Longrightarrow} M^* \text{ kontradikt.} \; \lightning_{\text{Beh 3}}$$

... und noch eine:

Beh 7 $\quad \alpha \vee \beta \in M^* \iff \alpha \in M^*$ oder $\beta \in M^*$

Bew 7 $\quad$ "$\Leftarrow$" Sei etwa $\alpha \in M^*$.

Wegen $\alpha \vdash \alpha \vee \beta$ (A2 und MP) folgt $M^* \vdash \alpha \vee \beta$, nach Beh 5 also $\alpha \vee \beta \in M^*$.

„$\Rightarrow$" Sei $\alpha \vee \beta \in M^*$. Angenommen, $\alpha, \beta \notin M^*$

$\underset{\text{Beh 6}}{\Longrightarrow}$ $\neg\alpha, \neg\beta \in M^*$

$\Longrightarrow$ $M^* \vdash \neg\alpha, \neg\beta, \alpha\vee\beta \underset{\substack{\neg\text{Regel}(3)\\ \text{S. }141}}{\longmapsto} \gamma$ für jedes γ

$\Longrightarrow$ M^* kontradiktorisch $\ \lightning$ Beh 3 $\boxed{7}$

Was haben wir nun davon?

Eine Menge $M^* \supseteq M$ mit folgenden Eigenschaften:

$$(*)\begin{cases} \forall \alpha: & \neg\alpha \in M^* \iff \alpha \notin M^* \quad \text{(Beh 6)} \\ \forall \alpha,\beta: & \alpha\vee\beta \in M^* \iff \alpha \in M^* \text{ oder } \beta \in M^* \quad \text{(Beh 7)}. \end{cases}$$

Betrachten wir die Abbildung

man kann sich vorstellen, B^* sei über Werte der Boole'schen Variablen definiert

$$\mathcal{B}^*: AL(\Pi) \longrightarrow \{W, F\}$$
$$\alpha \longmapsto \begin{cases} W, & \text{falls } \alpha \in M^* \\ F, & \text{falls } \alpha \notin M^* \end{cases}$$

Wegen der Eigenschaften $(*)$ gilt:

$\mathcal{B}^*$ ist eine Bewertung!

Und nach Konstruktion: $\mathcal{B}^*(\gamma) = W$ für alle $\gamma \in M$.

Wir setzen also $\mathcal{B} := \mathcal{B}^*|_M$ und sind fertig!

$\boxed{\text{Lemma 25}}$

$\boxed{\text{Theorem 16}}$

In der Aussagenlogik sind also $\vdash$ und $\models$ äquivalent.

Im Hinblick auf den Kalkül $\vdash$ kann man Theorem 15 und 16 auch so interpretieren:

- was immer man herleiten kann, ist gültig (d.h. $\vdash \alpha$ impliziert $\models \alpha$) Korrektheit

- was immer gültig ist, läßt sich auch herleiten (d.h. $\models \alpha$ impliziert $\vdash \alpha$) Vollständigkeit

Von einem "schönen" formalen System wünscht man sich, daß es beide Eigenschaften besitzt.

Fassen wir unsere Ergebnisse noch einmal zusammen:

<u>Theorem 17</u> Für eine höchstens abzählbar unendliche Menge Π von Boole'schen Variablen und Ausdrücke $\alpha, \beta \in AL(\Pi)$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $\alpha \models \beta$ (ii) $\alpha \vdash \beta$

(iii) $\models \alpha \to \beta$ (iv) $\vdash \alpha \to \beta$

<u>Beweis</u> durch Ringschluß

(i) $\Rightarrow$ (ii) : Vollständigkeitssatz (Theorem 16, S. 145)

(ii) $\Rightarrow$ (iv) : Deduktionstheorem (Lemma 24, S. 144)

(iv) $\Rightarrow$ (iii) : Korrektheitssatz (Theorem 15, S. 143)

(iii) $\Rightarrow$ (i) : direkt aus Definition von $\models$.

$\boxed{\text{Theorem 17}}$

Daraus folgt für die Äquivalenz aussagenlogischer Ausdrücke (S. 136):

$$\alpha \sim \beta \underset{\text{nach Def. } \sim}{\Longleftrightarrow} \begin{matrix} \alpha \models \beta \\ \text{und} \\ \beta \models \alpha \end{matrix} \underset{\text{nach Def. } \models}{\Longleftrightarrow} \models \alpha \leftrightarrow \beta$$

$$\underset{\text{Vollst./Korr}}{\Longleftrightarrow} \vdash \alpha \leftrightarrow \beta \Longleftrightarrow \begin{matrix} \alpha \vdash \beta \\ \text{und} \\ \beta \vdash \alpha \end{matrix}$$

"$\Leftarrow$" nach Lemma 24
"$\Rightarrow$" nach MP

Damit ist zumindest Frage 2 von S. 137 beantwortet: Wenn α und β dieselben Wahrheitstafeln haben, so kann man sie im Kalkül voneinander ableiten, und umgekehrt.

Anwendung: Kompaktheitssatz $M \models \alpha \Rightarrow \exists E \subseteq M$ endlich: $E \models \alpha$

(hier noch nicht so erstaunlich)

4.3. Normalformen der Aussagenlogik

Frage 1 von S. 135 ist noch offen: Wie "sieht man", ob ein Ausdruck α erfüllbar oder gültig ist?

Auf jeden Fall hilft es, α "in Form zu bringen"!

Beispiel: $\alpha \equiv \neg(p \wedge (q \vee \neg r)) \wedge (s \wedge \neg p \rightarrow t)$

Ist α gültig? (Kann man so kaum sehen)

Definition Ein Ausdruck $\beta \in AL(\Pi)$ ist in Konjunktiver Normalform (KNF), falls es ein $m \in \mathbb{N}$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in AL(\Pi)$ gibt mit