$$\mathcal{J}(\beta) = W \underset{\text{Def. }\mathcal{J}}{\Longleftrightarrow} \text{ es gibt } m_y \in A_s : \underbrace{\mathcal{J}_y^{m_y}(\beta')}\ = W$$

$$= \mathcal{J}_{y\ x}^{m_y\ \mathcal{J}_y^{m_y}(t)}(\alpha')$$

nach Induktions= voraussetzung für die Interpretation $\mathcal{J}_y^{m_y}$

wegen $y \notin \sigma(t)$ ist $\mathcal{J}_y^{m_y}(t) = \mathcal{J}(t)$, also

$$\Longleftrightarrow \text{ es gibt } m_y \in A_s : \underbrace{\mathcal{J}_{y\ x}^{m_y\ \mathcal{J}(t)}(\alpha')}\ = W$$

$$= \mathcal{J}_{x\ y}^{\mathcal{J}(t)\ m_y}$$

denn: $y \not\equiv x$ wegen $x \in f(\alpha)$, $y \notin f(\alpha)$

$$\Longleftrightarrow \mathcal{J}_x^{\mathcal{J}(t)}\underbrace{\left(\bigvee_y \alpha'\right)}_{\equiv \alpha} = W .$$

$\boxed{\text{Lemma 30}}$

4.5 Der Kalkül der Prädikatenlogik

Der Kalkül der Aussagenlogik (AL) beruhte auf 4 Axiomen und einer Regel:

A1: $\alpha \vee \alpha \rightarrow \alpha$

A2: $\alpha \rightarrow \alpha \vee \beta$

A3: $\alpha \vee \beta \rightarrow \beta \vee \alpha$

A4: $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\gamma \vee \alpha \rightarrow \gamma \vee \beta)$

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta \qquad \alpha}{\beta}$$

Modus Ponens = MP

Definition Der Kalkül der Prädikatenlogik (PL) besteht aus AL und den zusätzlichen Axiomen

P1: $\alpha \to \bigvee_x \alpha$

I1: $x = x$

I2: $x = t \to (\alpha \to \beta)$, falls $Subst(\alpha, x, t, \beta)$,

sowie den beiden Regeln

P2: $\dfrac{\alpha \to \beta}{\bigvee_x \alpha \to \beta}$, falls $x \notin f(\beta)$,

S: $\dfrac{\alpha}{\beta}$, falls $Subst(\alpha, x, t, \beta)$.

$\boxed{\text{Definition}}$

Wie schon beim Aussagenkalkül (S. 138) wird ein Herleitungsbegriff definiert:

Definition Sei $M \subseteq PL(\mathcal{S}, V)$ und $\alpha \in PL(\mathcal{S}, V)$. Dann bedeutet

$$M \vdash \alpha,$$

daß sich α in endlich vielen Schritten mit Hilfe der Regeln MP, P2, S aus den Axiomen A1–A4, P1, I1, I2 und den Ausdrücken in M herleiten läßt.

$\boxed{\text{Definition}}$

Insbesondere bedeutet für $M = \emptyset$

$$\vdash \alpha,$$

daß α im Prädikatenkalkül herleitbar ist.

Bemerkung Die Einschränkung "$x \notin f(\beta)$" bei P2 verhindert fragwürdige Ableitungen wie

1. $x = y \rightarrow x = y$ $\rightarrow$ Tg (1)
2. $\bigvee_x x = y \rightarrow x = y$ P2 ohne "$x \notin f(\beta)$"

Für jede passende Interpretation $\mathcal{I}$ wäre zwar $\mathcal{I}(\bigvee_x x = y) = W$, aber $\mathcal{I}(x = y)$ wäre nur wahr, wenn tatsächlich $\mathcal{I}(x) = \mathcal{I}(y)$ gilt.

Beispiele

(1) $\vdash \bigvee_x (Px \vee Qx) \leftrightarrow \bigvee_x Px \vee \bigvee_x Qx$

Beweis

1.	$Px \rightarrow \bigvee_x Px$	P1
2.	$\bigvee_x Px \rightarrow \bigvee_x Px \vee \bigvee_x Qx$	A2
3.	$Px \rightarrow \bigvee_x Px \vee \bigvee_x Qx$	KS(1,2)
4.	$Qx \rightarrow \bigvee_x Px \vee \bigvee_x Qx$	analog zu 3.
5.	$Px \vee Qx \rightarrow \bigvee_x Px \vee \bigvee_x Qx$	$\vee$-Regel(3): 3,4
6.	$\bigvee_x (Px \vee Qx) \rightarrow \bigvee_x Px \vee \bigvee_x Qx$	P2(5), da $x \notin f(\bigvee_x Px \vee \bigvee_x Qx)$
7.	$Px \rightarrow Px \vee Qx$	A2
8.	$Px \vee Qx \rightarrow \bigvee_x (Px \vee Qx)$	P1
9.	$Px \rightarrow \bigvee_x (Px \vee Qx)$	KS(7,8)
10.	$\bigvee_x Px \rightarrow \bigvee_x (Px \vee Qx)$	P2(9), da $x \notin f(\bigvee_x (Px \vee Qx))$
11.	$\bigvee_x Qx \rightarrow \bigvee_x (Px \vee Qx)$	analog zu 10
12.	$\bigvee_x Px \vee \bigvee_x Qx \rightarrow \bigvee_x (Px \vee Qx)$	$\vee$Regel(3): 10,11

eine Richtung fertig!

(1+4)

13. $\left(\bigvee_x (Px \vee Qx) \longrightarrow \bigvee_x Px \vee \bigvee_x Qx\right) \wedge$ (*) : 6, 12

$\left(\bigvee_x Px \vee \bigvee_x Qx \longrightarrow \bigvee_x (Px \vee Qx)\right)$

$\equiv \quad \bigvee_x (Px \vee Qx) \Longleftrightarrow \bigvee_x Px \vee \bigvee_x Qx$

Begründung von (*) : $\{\alpha, \beta\} \vdash \alpha \wedge \beta$ (klar nach Vollständigkeitssatz für AL)

direkter Beweis für

1. α nach Vor.
2. β nach Vor.
3. $\neg\alpha \vee \neg\beta \rightarrow \neg\alpha \vee \neg\beta$ → Regel (1)

   $\equiv \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \vee (\neg\alpha \vee \neg\beta)$
4. $\neg\alpha \vee (\neg\beta \vee \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta))$ A3, ∨Regeln(4)

   $\equiv \alpha \longrightarrow (\beta \rightarrow \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta))$
5. $\beta \rightarrow \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$ MP (1, 4)
6. $\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$ MP (2, 5)

   $\equiv \alpha \wedge \beta$

(ii) $\bigvee_x (Px \wedge Qx) \longrightarrow \bigvee_x Px \wedge \bigvee_x Qx$

Beweis

1. $Px \longrightarrow \bigvee_x Px$ P1

   $\equiv \neg Px \vee \bigvee_x Px$
2. $\neg\neg \bigvee_x Px \vee \neg Px$ A3, MP, $\vdash \alpha \Leftrightarrow \neg\neg\alpha$

   $\equiv \neg \bigvee_x Px \longrightarrow \neg Px$
3. $\neg Px \longrightarrow \neg Px \vee \neg Qx$ A2
4. $\neg \bigvee_x Px \longrightarrow \neg Px \vee \neg Qx$ KS (2, 3)

5. $\neg \bigvee_x Qx \quad \rightarrow \quad \neg Px \vee \neg Qx$ analog zu 4

6. $\neg \bigvee_x \neg Px \vee \neg \bigvee_x \neg Qx \quad \rightarrow \quad \neg Px \vee \neg Qx$ $\vee$Regel(3) : 4, 5

7. $\neg(\neg Px \vee \neg Qx) \quad \rightarrow \quad \neg(\neg \bigvee_x \neg Px \vee \neg \bigvee_x \neg Qx)$ wie 2

$\equiv \quad Px \wedge Qx \quad \rightarrow \quad \bigvee_x Px \wedge \bigvee_x Qx$

8. $\bigvee_x (Px \wedge Qx) \quad \rightarrow \quad \bigvee_x Px \wedge \bigvee_x Qx$ P2 : 7, da $x \notin f$(rechte Seite)

Man beachte:

$\bigvee_x (Px \wedge Qx) \leftarrow \bigvee_x Px \wedge \bigvee_x Qx$ ist nicht herleitbar

(wird aus Korrektheits=satz folgen, Theorem 18, S. 182)

(iii) Termgleichheit ist eine Äquivalenzrelation, d.h.

a) $\vdash t_1 = t_1$ (Reflexivität)

b) $\{t_1 = t_2\} \vdash t_2 = t_1$ (Symmetrie)

c) $\{t_1 = t_2, t_2 = t_3\} \vdash t_1 = t_3$ (Transitivität)

Beweise a)

1. $x = x$ I 1

2. $t_1 = t_1$ S : 1., denn $Subst(x = x, x, t_1, t_1 = t_1)$

Seien x, y, z paarweise verschieden und $\{x, y, z\} \cap (v(t_1) \cup v(t_2) \cup v(t_3)) = \emptyset$

→ b)

1. $x = y \rightarrow (x = z \rightarrow y = z)$ I 2, denn $Subst(x = z, x, y, y = z)$

2. $x = y \rightarrow (x = x \rightarrow y = x)$ S : 1, denn z wurde durch x substituiert.

3.	$x = x \to (x = y \to y = x)$	$\to$ Regel (3): 2
4.	$x = x$	I 1
5.	$x = y \to y = x$	MP (4, 3)
6.	$t_1 = y \to y = t_1$	S: 5, denn x durch t_1 substituiert
7.	$t_1 = t_2 \to t_2 = t_1$	S: 6, denn y durch t_2 substituiert
8.	$t_1 = t_2$	nach Vor.
9.	$t_2 = t_1$	MP (8, 7)

c)

1.	$x = y \to (x = z \to y = z)$	wie 1. in b)
2.	$y = x \to x = y$	nach b), 5.
3.	$y = x \to (x = z \to y = z)$	KS (2, 1)
4.	$t_1 = x \to (x = z \to t_1 = z)$	S: 3, denn y durch t_1 subst.
5.	$t_1 = t_2 \to (t_2 = z \to t_1 = z)$	S: 4, denn x durch t_2 subst.
6.	$t_1 = t_2$	nach Vor.
7.	$t_2 = z \to t_1 = z$	MP (6, 5)
8.	$t_2 = t_3 \to t_1 = t_3$	S: 7, denn z durch t_3 subst
9.	$t_2 = t_3$	nach Var.
10.	$t_1 = t_3$	MP (9, 8).

Nun zum Begriff der inhaltlichen Folgerung!

Es bezeichne

$\mathcal{A}$ eine $\mathcal{S}$-Struktur

$\mathcal{J}$ eine Interpretation von $PL(\mathcal{S}, V)$ in $\mathcal{A}$

M eine Teilmenge von, α einen Ausdruck in $PL(\mathcal{S}, V)$.

Definition

(i) α ist in $\mathcal{A}$ erfüllbar $:\Longleftrightarrow \exists\, \mathcal{J}$ in $\mathcal{A}$ $: \mathcal{J}(\alpha) = W$

(ii) α ist (irgendwo) erfüllbar $:\Longleftrightarrow \exists\, \mathcal{A}, \mathcal{J}$ in $\mathcal{A}$ $: \mathcal{J}(\alpha) = W$

(iii) α folgt aus M in $\mathcal{A}$ $:\Longleftrightarrow \forall \underset{\text{in } \mathcal{A}}{\mathcal{J}} : \big(\mathcal{J}(M) = W \Rightarrow \mathcal{J}(\alpha) = W\big)$

$M \underset{\mathcal{A}}{\models} \alpha$

(iv) α folgt aus M (überall) $:\Longleftrightarrow \forall \mathcal{A}\ \forall \mathcal{J}$ in $\mathcal{A}$:

$\big(\mathcal{J}(M) = W \Rightarrow \mathcal{J}(\alpha) = W\big)$

$M \models \alpha$

im Spezialfall $M = \emptyset$ sagt man

in (iii): α ist gültig in $\mathcal{A}$, $\underset{\mathcal{A}}{\models} \alpha$

in (iv): α ist gültig, $\models \alpha$

$\boxed{\text{Definition}}$

Folgende Tatsachen sind offensichtlich:

- α ist in $\mathcal{A}$ erfüllbar $\Rightarrow$ α ist erfüllbar
- α ist gültig $\Rightarrow$ α ist in $\mathcal{A}$ gültig.

Ferner impliziert Lemma 28 (S. 168.1, 168.3)

- $f(\alpha) = 0 \Rightarrow$ (α ist in $\mathcal{A}$ erfüllbar $\Leftrightarrow$ α ist in $\mathcal{A}$ gültig)

- Der Ausdruck $x = y$ ist in jedem $\mathcal{A}$ erfüllbar, aber gültig nur in solchen $\mathcal{A}$, deren Trägermenge nur ein Element enthält. Klar: $f(x=y) = \{x, y\}$.

Am wichtigsten für uns sind die Definitionen von

(iii) α ist erfüllbar

(iv) α ist gültig , $\models \alpha$

Offenbar gilt wieder

- α ist gültig $\Leftrightarrow$ $\neg\alpha$ ist nicht erfüllbar

Viel interessanter ist die Frage, wie in der Prädikaten=logik

$\vdash$ und $\models$

zusammenhängen. Dazu gleich mehr.

Weitere Beispiele:

Lemma 31 Alle Axiome des Prädikatenkalküls sind gültig.

Beweis

Für A1–A4 folgt das aus ihrer Gültigkeit im AL (wenn jede Bewertung der Primformeln die Ausdrücke wahr macht, so auch jede Interpretation).

P1: $\alpha \to \bigvee_x \alpha$ Sei $\mathfrak{I}(\alpha) = W$.

$\mathfrak{I}(\bigvee_x \alpha) = W \iff$ es gibt $\varphi \in A_s$: $\mathfrak{I}_x^{\varphi}(\alpha) = W$.

Das ist z.B. für $\varphi := \mathfrak{I}(x)$ erfüllt, wegen

$$\mathfrak{I}_x^{\mathfrak{I}(x)}(\alpha) = \mathfrak{I}(\alpha) = W.$$

I1: $x = x$. Offenbar gilt stets $\mathfrak{I}(x = x) = W$.

I2: $x = t \to (\alpha \to \beta)$, falls $\mathrm{Subst}(\alpha, x, t, \beta)$.

Gelte $\mathfrak{I}(x = t) = W$, also $\mathfrak{I}(x) = \mathfrak{I}(t)$, und $\mathrm{Subst}(\alpha, x, t, \beta)$. Aus Lemma 30 (Überführungstheorem, S. 171) folgt:

$$\mathfrak{I}(\beta) = \mathfrak{I}_x^{\mathfrak{I}(t)}(\alpha) = \mathfrak{I}_x^{\mathfrak{I}(x)}(\alpha) = \mathfrak{I}(\alpha).$$

Also ist $\mathfrak{I}(\alpha \to \beta) = W$ (sogar $\mathfrak{I}(\alpha \leftrightarrow \beta) = W$)

$\boxed{\text{Lemma 31}}$

Wir zeigen jetzt, daß der Prädikatenkalkül korrekt ist.

Theorem 18 (Korrektheitssatz)

$$M \vdash \alpha \text{ und } f(M) = \emptyset \implies M \models \alpha.$$

$f(M) = \emptyset$ bedeutet: $\forall \beta \in M: f(\beta) = \emptyset$; vgl. S. 167

vgl. Theorem 15, S. 143 für AL

Warum man diese Bedingung braucht, wird anschließend erläutert.

Beweis Seien $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n = \alpha$ die Zwischenschritte einer Herleitung von α im PL.

Wir zeigen durch Induktion über $m = 1, 2, \dots, n$ folgende Aussage:

$$A(m): \quad \forall \mathfrak{I} \quad (\mathfrak{I}(M) = W \implies \mathfrak{I}(\alpha_m) = W).$$

Induktionsanfang Sei $m = 1$. Sei $\mathfrak{I}$ eine Interpretation mit $\mathfrak{I}(M) = W$.

Ist $\alpha_1 \in M$, folgt $\mathfrak{I}(\alpha_1) = W$ nach Voraussetzung.

Ist α_1 ein Axiom des PL, folgt nach Lemma 31, daß α_1 gültig ist, also $\mathfrak{I}(\alpha_1) = W$.

Induktionsschritt Sei $m \le n-1$, und gelte $A(\mu)$ für $\mu = 1, 2, \dots, m$. Zu zeigen ist: $A(m+1)$.

Sei also $\mathfrak{I}$ beliebig mit $\mathfrak{I}(M) = W$. Zu zeigen: $\mathfrak{I}(\alpha_{m+1}) = W$.

Ist $\alpha_{m+1} \in M$ oder ein Axiom, folgt $\mathfrak{I}(\alpha_{m+1}) = w$ wie im Induktionsanfang.
Sei also α_{m+1} mit einer Regel des PL gebildet.

Falls α_{m+1} mit $\boxed{MP}$ aus α_μ, α_ν mit $\mu < \nu \leq m$, so folgt

$$\alpha_\nu \equiv \alpha_\mu \to \alpha_{m+1} .$$

Ind. Voraussetzung $A(\mu)$ für $\mathfrak{I}$ $\Rightarrow$ $\mathfrak{I}(\alpha_\mu) = w$

" $A(\nu)$ " $\Rightarrow$ $\mathfrak{I}(\alpha_\mu \to \alpha_{m+1}) = w$

Also ist auch $\mathfrak{I}(\alpha_{m+1}) = w$.

Falls α_{m+1} mit $\boxed{P2}$ aus α_μ mit $\mu \leq m$, so folgt

$$\alpha_\mu \equiv \gamma \to \delta$$

$$\alpha_{m+1} \equiv \bigvee_x \gamma \to \delta \quad \text{und } x \notin f(\delta) .$$

Zum Nachweis von $\mathfrak{I}(\alpha_{m+1}) = w$ nehmen wir an

$\mathfrak{I}(\bigvee_x \gamma) = w$ und folgern $\mathfrak{I}(\delta) = w$.

$\mathfrak{I}(\bigvee_x \gamma) = w \Rightarrow$ es gibt $\varphi \in A_s$: $\mathfrak{I}_x^\varphi(\gamma) = w$.

Wegen $f(M) = \emptyset$ ist für jedes $\beta \in M$: $\mathfrak{I}(\beta) = \mathfrak{I}_x^\varphi(\beta)$.

Die Voraussetzung $\mathfrak{I}(M) = w$ impliziert also $\mathfrak{I}_x^\varphi(M) = w$.

$$\underset{\substack{\text{Ind. Vor.}\\ A(\mu) \text{ für } \mathfrak{I}_x^\varphi}}{\Longrightarrow} \quad w = \mathfrak{I}_x^\varphi(\alpha_\mu) = \mathfrak{I}_x^\varphi(\gamma \to \delta)$$

$$\underset{\mathfrak{I}_x^\varphi(\gamma) = w}{\Longrightarrow} \quad \mathfrak{I}_x^\varphi(\delta) = w \quad \underset{x \notin f(\delta)}{\Longrightarrow} \quad \mathfrak{I}(\delta) = w.$$

Falls schließlich α_{m+1} mit $\boxed{S}$ aus α_μ mit $\mu \leq m$, so folgt

$$\mathrm{Subst}(\alpha_\mu, x, t, \alpha_{m+1}).$$

Wir müssen zeigen:

$$W \stackrel{!}{=} \mathcal{I}(\alpha_{m+1}) \underset{\substack{\text{Lemma 30,}\\ \text{S. 171}}}{=} \mathcal{I}_x^{\mathcal{I}(t)}(\alpha_\mu).$$

Wie im Fall von $\boxed{P2}$ gilt $\mathcal{I}_x^{\mathcal{I}(t)}(M) = \mathcal{I}(M) = W$, da M keine freien Variablen enthält.

Die Induktionsvoraussetzung $A(\mu)$ für $\mathcal{I}_x^{\mathcal{I}(t)}$ impliziert also

$$\mathcal{I}_x^{\mathcal{I}(t)}(\alpha_\mu) = W.$$

Damit sind alle Fälle behandelt. $\boxed{\text{Theorem 18}}$

Bemerkungen

1) Für $M = \emptyset$ besagt Theorem 18:

$$\vdash \alpha \implies \models \alpha,$$

d.h., was herleitbar ist, ist auch gültig.

2) Für $M \neq \emptyset$ wäre Theorem 18 ohne die Voraussetzung $f(M) = \emptyset$ falsch.

Beispiel $\quad M = \{x \neq y\}, \quad \alpha \equiv z \neq y$

Dann folgt $M \vdash \alpha$ durch Anwendung von S, aber eine Interpretation $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{I}(x) \neq \mathcal{I}(y)$ kann sehr wohl $\mathcal{I}(z) = \mathcal{I}(y)$ erfüllen.

Auch für die Prädikatenlogik gilt ein Vollständigkeitssatz:

<u>Theorem 19</u> (Gödel) $\quad M \models \alpha \Rightarrow M \vdash \alpha$

Der Beweis ist ähnlich zum Beweis von Theorem 16, S. 145.

Definiert man – wie früher in der AL – für zwei Ausdrücke $\alpha, \beta \in PL(S, V)$ die Äquivalenzrelation

$$\alpha \sim \beta \;:\Longleftrightarrow\; \forall A \;\forall \mathcal{I}: \quad \mathcal{I}(\alpha) = \mathcal{I}(\beta),$$

so kann man die Aussagen von Theorem 18 und Theorem 19 so zusammenfassen:

<u>Theorem 20:</u> Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $\alpha \sim \beta$ $\qquad$ (ii) $\alpha \models \beta$ und $\beta \models \alpha$

(iii) $\models \alpha \Leftrightarrow \beta$ $\qquad$ (iv) $\vdash \alpha \Leftrightarrow \beta$

<u>Beweis:</u>

(i) $\Leftrightarrow$ (ii) direkt aus den Definitionen von $\sim$ und $\models$

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) nach Definition von $\models$

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Vollständigkeitssatz (Theorem 19)

(iv) $\Rightarrow$ (iii) Korrektheitssatz (Theorem 18). $\boxed{\text{Theorem 20}}$

<u>Zusatz:</u> Jede der Aussagen (i) – (iv) von Theorem 20 impliziert $\alpha \vdash \beta$ und $\beta \vdash \alpha$ (durch Modus Ponens).

Umgekehrt: Aus $\alpha \vdash \beta$ und $f(\alpha) = \emptyset$ folgt $\vdash \alpha \to \beta$

aus $\beta \vdash \alpha$ und $f(\beta) = \emptyset$ folgt $\vdash \beta \to \alpha$

beides zusammen ergibt $\vdash \alpha \Leftrightarrow \beta$, also (iv).

Wie für AL zeigt man

Kompaktheitssatz (für Folgerung)

$$\left.\begin{array}{l} M \models \alpha \\ f(M) = \emptyset \end{array}\right\} \Rightarrow \text{es gibt } E \subseteq M \text{ endlich mit } E \models \alpha$$

Kompaktheitssatz (für Erfüllbarkeit)

M mit $f(M) = \emptyset$ ist erfüllbar $\Leftrightarrow$
$\forall E \subseteq M$ endlich: E ist erfüllbar.

Hieraus folgt eine überraschende Ausdrucksschwäche der PL I

Theorem Es gibt keine Menge M von Ausdrücken mit folgender Eigenschaft: $f(M) = \emptyset$ und
$\forall \mathcal{A}$: (M erfüllbar in $\mathcal{A}$ $\Leftrightarrow$ A_s ist endlich)
($\Leftrightarrow$ M gültig in $\mathcal{A}$)

Beweis Angenommen, es gibt doch solch ein M.
Sei $\alpha_n := \bigwedge_{x_1} \bigwedge_{x_2} \bigwedge \ldots \bigwedge_{x_{n-1}} \bigvee_{y} (x_1 \neq y \wedge x_2 \neq y \wedge \ldots \wedge x_{n-1} \neq y)$
Klar: α_n erfüllbar über $\mathcal{A}$ $\Leftrightarrow$ $|A_s| \geq n$.

Sei $M' := M \cup \{\alpha_n \mid n \geq 2\}$.
Nach Voraussetzung: Jede endliche Menge $E \subset M'$ ist erfüllbar $\underset{\substack{\text{Kompaktheitssatz} \\ \text{Erfüllbarkeit}}}{\Longrightarrow}$ M' ist erfüllbar $\lightning$

$\square$

$\rightarrow$ PL 2

Alle Menschen sind grün $\quad \gamma = \bigwedge_x (Mx \to Gx)$

$$= \neg \bigvee_x \neg(\neg Mx \vee Gx)$$

$\bigwedge_x \alpha = \neg \bigvee_x \neg\alpha$

$\alpha \to \beta = \neg\alpha \vee \beta$

Negation: $\neg\gamma = \bigvee_x \neg(\neg Mx \vee Gx)$

$$= \bigvee_x (Mx \wedge \neg Gx)$$

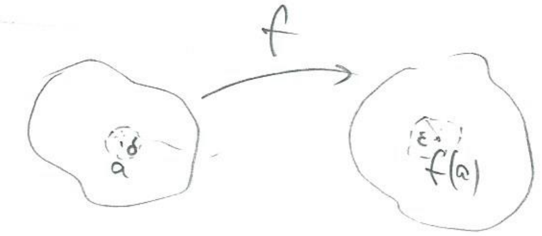
Es gibt einen Menschen, der nicht grün ist

Ausdrücke besser lesbar machen:

* mit $Subst(\alpha, x, t, \beta)$ vernünftige freie Variablen einführen
* Quantoren nach vorn bringen (pränex machen)
* im Kern: KNF oder DNF, oder $\to$

$\alpha =$

Stetigkeit $\gamma = \bigwedge_\varepsilon \bigvee_\delta \bigwedge_x (Kdax\delta \to Kdfafx\varepsilon)$



$\neg\gamma = \bigvee_\varepsilon \bigwedge_\delta \bigvee_x (Kdax\delta \wedge \neg Kdfafx\varepsilon)$