

## Übungszettel 4

### Aufgabe 4.1: Äquivalenzrelationen und Abbildungen

(4 Punkte)

Seien  $A, B$  nichtleere Mengen. Zeigen Sie:

- a) Ist  $f : A \rightarrow B$  eine Abbildung von  $A$  nach  $B$ , so wird durch

$$\forall a_1, a_2 \in A : (a_1 \sim a_2 \iff f(a_1) = f(a_2))$$

eine Äquivalenzrelation  $\sim$  auf  $A$  definiert.

- b) Ist  $\sim$  eine beliebige Äquivalenzrelation auf  $A$  und ist  $C = \{[a]_{\sim} \mid a \in A\}$  die Menge der Äquivalenzklassen von  $\sim$ , so gibt es eine Abbildung  $p : A \rightarrow C$ , so dass für alle  $a_1, a_2 \in A$ :

$$a_1 \sim a_2 \iff p(a_1) = p(a_2)$$

- c) Seien  $\sim$  und  $C$  wie in Aufgabenteil b). Ist  $f : A \rightarrow B$  eine Abbildung und gilt

$$\forall a_1, a_2 \in A : (a_1 \sim a_2 \implies f(a_1) = f(a_2))$$

so wird durch  $g([a]_{\sim}) = f(a)$  für alle  $a \in A$  eine Abbildung  $g : C \rightarrow B$  definiert.

### Aufgabe 4.2: Äquivalenzklassen

(4 Punkte)

- a) Beschreiben Sie für die Äquivalenzrelationen aus Aufgabe 2.a) und 2.c) vom Übungsblatt 3 die Äquivalenzklassen.
- b) Bestimmen Sie die folgenden Äquivalenzklassen. Vereinfachen Sie die Schreibweise dabei so weit wie möglich. Schreiben Sie zum Beispiel  $[1]$  statt  $[7]$  für die Äquivalenzklasse  $\{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}$  der Relation  $\equiv_3$ .

(i)  $[42] \oplus_{47} [276]$

(ii)  $[7] \circ_{11} [19]$