Logik und diskrete Strukturen
Wintersemester 2017/18

Abgabe: 12.12.17 - 10:15
Besprechung: 18.12.2017 - 22.12.2017

Prof. Dr. Rolf Klein
Barbara Schwarzwald
Institut für Informatik

Übungszettel 9

Aufgabe 9.1: Strukturelle Induktion (4 Punkte)

Sei Σ ein beliebiges Alphabet. Für ein Wort $w = w_1 \dots w_n \in \Sigma^*$ bezeichnen wir mit $w^R = w_n w_{n-1} \dots w_2 w_1$ die Spiegelung von w. Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine reguläre Sprache. Zeigen Sie mittels struktureller Induktion über reguläre Ausdrücke, dass dann auch die Sprache $L^R = \{w^R : w \in L\}$ regulär ist.

Hinweis: Definieren Sie zunächst rekursiv eine Funktion f, die jedem regulären Ausdruck R einen regulären Ausdruck $f(R)$ mit $L(f(R)) = \{w^R : w \in L(R)\}$ zuweist.

Aufgabe 9.2: Schubfachprinzip (4 Punkte)

Betrachten Sie eine Gruppe von $n \geq 2$ Personen P und die symmetrische Relation $R \subseteq PxP := \{(x,y) | x$ ist bekannt mit $y\}$. Zeigen Sie, dass es dann immer 2 verschiedene Personen $p, q \in P$, $p \neq q$ gibt, die die gleiche Anzahl Bekannter in P haben.

Aufgabe 9.3: Cantorsche Paarungsfunktion (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die *Cantorsche Paarungsfunktion* $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, gegeben durch

$$g(x,y) = \frac{(x+y-2)(x+y-1)}{2} + y$$

bijektiv ist.

Hinweis: Nutzen Sie die alternative Darstellung $g(x,y) = y + \sum_{k=1}^{x+y-2} k$.

Aufgabe 9.4: Hilberts Hotel (4 Punkte)

In einer kleinen Stadt in der Nähe von Oberwolfach gibt es ein Hotel mit abzählbar unendlich vielen Einzelzimmern. Eines späten Abends kommt ein unangemeldeter Besucher an diesem Hotel an und fragt nach einem Zimmer. Der Rezeptionist ist untröstlich, denn alle Zimmer sind schon belegt. Bevor der Besucher jedoch auf der Straße übernachten muss, fällt dem Hoteldirektor eine Lösung ein: Er verlegt die Gäste seiner Zimmer so auf neue Zimmer, dass zwar jeder der alten Gäste immer noch ein Einzelzimmer hat, aber trotzdem ein Zimmer freigeworden ist. Wie macht er das?

Am nächsten Tag reist keiner der Gäste ab, am Abend sind also immer noch alle Zimmer belegt. Da trifft auf einmal ein Reisebus mit abzählbar unendlich vielen Gästen ein. Wie schafft es der Direktor auch in dieser Situation, genug Platz zu schaffen, damit jeder Gast am Ende ein Zimmer für sich allein hat?

Was müsste er tun, falls abzählbar unendlich viele Reisebusse mit jeweils abzählbar vielen Gästen einträfen?