

**Abgabe: keine**  
**Besprechung: keine**

## Übungszettel 13

### Aufgabe 13.1: Kontradiktorische Mengen

(4 Punkte)

Beweisen Sie:

- a) Es gibt eine Menge  $M \subset AL(\Pi)$  und aussagenlogische Ausdrücke  $\alpha, \beta \in AL(\Pi)$ , so dass die folgenden vier Bedingungen gleichzeitig erfüllt sind:
- $M \cup \{\alpha\}$  ist nicht kontradiktorisch.
  - $M \cup \{\beta\}$  ist nicht kontradiktorisch.
  - $M \cup \{\alpha, \beta\}$  ist kontradiktorisch.
  - $\{\alpha, \beta\}$  ist nicht kontradiktorisch.
- b) Sind  $M \subset N \subset AL(\Pi)$  und  $M$  kontradiktorisch, so ist auch  $N$  kontradiktorisch.

### Aufgabe 13.2: Ableitbarkeit

(4 Punkte)

- a) Geben Sie Herleitung im aussagenlogischen Kalkül aus der Vorlesung für
- $\{\alpha\} \vdash \neg\neg\alpha$
  - $\{\neg\beta, \neg\gamma\} \vdash \neg(\beta \vee \gamma)$
- b) Sei  $\alpha \in AL(\Pi)$  und sei  $M \subset AL(\Pi)$  eine Menge, die für jedes in  $\alpha$  vorkommende Variablensymbol  $p$  entweder  $p$  oder  $\neg p$  enthält. Beweisen Sie, dass dann schon  $M \vdash \alpha$  oder  $M \vdash \neg\alpha$  gilt.

**Tip:** Verwenden Sie für b) strukturelle Induktion, sowie die beiden Herleitungsregeln aus a).

### Aufgabe 13.3: Freie Variablen

(4 Punkte)

Bestimmen Sie für jeden der folgenden prädikatenlogischen Ausdrücke die Menge der in ihm enthaltenen freien Variablen (wobei  $k$  ein Konstantensymbol aus der zugehörigen Signatur sei):

a)

$$\left(\bigvee_x x \doteq y \vee x \doteq z\right)$$

b)

$$\neg \bigvee_x \neg x \doteq k$$

### Aufgabe 13.4: Substitution

(4 Punkte)

Betrachten Sie den folgenden Prädikatenlogischen Ausdruck:

$$\alpha = \left(\bigvee_x x \doteq y \vee \bigvee_y x \doteq y\right)$$

Geben Sie den Ausdruck  $\beta$  an, so dass  $\text{Subst}(\alpha, x, z, \beta)$  wahr ist und den Ausdruck  $\gamma$  an, so dass  $\text{Subst}(\alpha, y, z, \gamma)$  wahr ist.