Logik und diskrete Strukturen WS 2014/15
Probeklausur
Universität Bonn, Institut für Informatik I

Abgabe: keine Besprechung: KW 03

- *Unter Prüfungsbedingungen hätten Sie 90 Minuten Zeit, diese Klausur zu bearbeiten. Die Probeklausur hat keinerlei Einfluss auf die Prüfungszulassung oder die endgültige Note. Die Probeklausur umfasst nur bisher in der Vorlesung behandelte Themen. Für die Abschlussklausur ist selbstverständlich der gesamte Vorlesungsinhalt relevant.*
- *Die Besprechung findet nach der vorlesungsfreien Zeit in den Übungsgruppen statt.*

Aufgabe 1:

a) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass die Gleichung

$$[\![n^3]\!] \oplus_3 [\![2n]\!] = [\![0]\!]$$

in $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt.

b) Seien M und N Mengen mit jeweils mindestens zwei Elementen und sei $f\colon M \longrightarrow N$ eine Funktion. Geben Sie die Definition für Surjektivität von f an und zeigen sie, dass diese äquivalent zu folgendem Ausdruck ist:

$$\neg(\exists y \in N\, \forall x \in M\colon\, f(x) \neq y).$$

c) Seien $A, B \neq \emptyset$ endliche Mengen mit $|A| = |B|$ und sei $f\colon A \longrightarrow B$ eine injektive Funktion von A nach B. Zeigen Sie, dass dann f bijektiv ist.

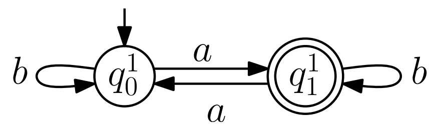
d) Zeigen Sie, dass die Relation $R = \{(a,a), (a,b), (b,b), (a,a), (c,c)\}$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge $M = \{a, b, c\}$ ist.
Geben Sie die Elemente der Äquivalenzklasse an, die das Element a enthält.

Aufgabe 2:

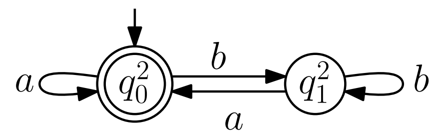
a) Benennen Sie die fünf Komponenten, aus denen ein deterministischer endlicher Automat (DFA) besteht. Geben Sie bei Funktionen und Relationen stets den Definitions- und den Bildbereich an.

b) Geben Sie einen DFA an, der die Sprache $L = L(M_1) \cup L(M_2)$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ entscheidet, wobei M_1 und M_2 die beiden unten abgebildeten DFAs sind.

$\boldsymbol{M_1}$**:**



$\boldsymbol{M_2}$**:**



c) Geben Sie das Punmping-Lemma an.

d) Geben Sie einen regulären Ausdruck R an, der die Sprache

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid (|w|_a \text{ ist gerade}) \vee (|w|_b = 1)\}$$

erzeugt.

e) Geben Sie eine reguläre Grammatik G an, die die Sprache

$$L = \{a^n (bc)^m \mid n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}_0\}$$

erzeugt.

f) Sei $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a = 2 \cdot |w|_b\}$ eine Sprache über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Ist L regulär? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 3:

a) Sei $A = \{1, \ldots, n\}$ für eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Struktur $(A, \bullet)$ mit $a \bullet b = \min\{a, b\}$ für $a, b \in A$ ein kommutativer Monoid ist.

b) Führen Sie den euklidischen Algorithmus für die Zahlen $a = 22$ und $b = 15$ aus.

c) Bestimmen Sie das Inverse von $[\![15]\!]_{22}$ in $(\mathbb{Z}/22\mathbb{Z}, \odot_{22})$.

d) Sei $x \in \mathbb{Z}$. Lösen Sie mit Hilfe des chinesischen Restsatzes das Kongruenzsystem

$$\begin{aligned} x &\equiv 6 \bmod 15 \\ x &\equiv 2 \bmod 22. \end{aligned}$$

e) Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und sei 0 das neutrale Element der Addition. Zeigen Sie, dass 0 kein multiplikativ Inverses bestitzt.

Aufgabe 4:

a) Erstellen Sie eine Wahrheitstabelle für die aussagenlogische Formel

$$\varphi = (((x_1 \wedge \neg x_2) \vee \neg(\neg x_1 \wedge x_3)) \wedge (\neg x_3 \vee x_2)) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3).$$

b) Bestimmen Sie zu $\varphi = \neg(x_1 \leftrightarrow x_2)$ eine äquivalente aussagenlogische Formel in konjunktiver Normalform (KNF).

c) Zeigen Sie, dass die aussagenlogischen Formeln $\varphi_1 = \neg x_2 \vee \neg(\neg x_1 \leftrightarrow \neg x_3)$ und $\varphi_2 = ((\neg x_1 \wedge (x_1 \leftrightarrow x_2)) \vee (x_1 \wedge (\neg x_1 \leftrightarrow x_2))) \vee (x_1 \wedge \neg x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_3)$ äquivalent zueinander sind.

d) Zeigen Sie, dass die aussagenlogischen Formeln $\varphi_1 = (x_1 \wedge (x_2 \vee x_3)) \vee (x_2 \wedge x_3)$ und $\varphi_2 = \neg x_1 \vee (x_2 \leftrightarrow \neg x_3)$ nicht äquivalent zueinander sind.