Prof. Dr. Rolf Klein
Barbara Schwarzwald
Institut für Informatik

Übungszettel 13

Aufgabe 13.1: Kontradiktorische Mengen (4 Punkte)

Beweisen Sie:

a) Es gibt eine Menge $M \subset AL(\Pi)$ und aussagenlogische Ausdrücke $\alpha, \beta \in AL(\Pi)$, so dass die folgenden vier Bedingungen gleichzeitig erfüllt sind:

- $M \cup \{\alpha\}$ ist nicht kontradiktorisch.
- $M \cup \{\beta\}$ ist nicht kontradiktorisch.
- $M \cup \{\alpha, \beta\}$ ist kontradiktorisch.
- $\{\alpha, \beta\}$ ist nicht kontradiktorisch.

b) Sind $M \subset N \subset AL(\Pi)$ und M kontradiktorisch, so ist auch N kontradiktorisch.

Lösung zu Aufgabe 13.1

a) Z.B. $M = \{A \vee B\}$, $\alpha = \neg A$, $\beta = \neg B$.

b) Wenn M kontradiktorische ist, gilt für jedes $\alpha \in AL(\Pi)$: $M \vdash \alpha$. Betrachte ein ein beliebiges α: Durch die Vollständigkeit gibt es dann eine Herleitung für $M \vdash \alpha$ bestehend aus endlich vielen Herleitungsschritten $\beta_1, \dots, \beta_n$. Für jedes dieser β_i gilt nun min. eine der folgenden Eigenschaften:

- $\beta_i \in M \Rightarrow \beta_i \in N$
- oder β_i ist Ausdruck eines der Axiome
- oder β_i ist durch Modus Ponens hergeleitet aus zwei Ausdrücken β_j und $\beta_k \equiv \beta_j \rightarrow \beta_i$ mit $j, k < i$.

Damit ist $\beta_1, \dots, \beta_n$ eine Herleitung für $N \vdash \alpha$. Also lässt sich jedes beliebige α aus N herleiten, somit is N kontradiktorisch.

Aufgabe 13.2: Ableitbarkeit (4 Punkte)

a) Geben Sie Herleitung im aussagenlogischen Kalkül aus der Vorlesung für

- $\{\alpha\} \vdash \neg\neg\alpha$
- $\{\neg\beta, \neg\gamma\} \vdash \neg(\beta \vee \gamma)$

b) Sei $\alpha \in AL(\Pi)$ und sei $M \subset AL(\Pi)$ eine Menge, die für jedes in α vorkommende Variablensymbol p entweder p oder $\neg p$ enthält. Beweisen Sie, dass dann schon $M \vdash \alpha$ oder $M \vdash \neg\alpha$ gilt.

Tipp: Verwenden Sie für b) strukturelle Induktion, sowie die beiden Herleitungsregeln aus a).

Lösung zu Aufgabe 13.2

a) 1)

1.	$\neg\alpha \rightarrow \neg\alpha$	$\rightarrow$ Regel (1): $\alpha \rightarrow \alpha$
	$\equiv \neg\neg\alpha \vee \neg\alpha$	
2.	$\neg\neg\alpha \vee \neg\alpha \rightarrow \neg\alpha \vee \neg\neg\alpha$	Axiom 3: $\alpha \vee \beta \rightarrow \beta \vee \alpha$
3.	$\neg\alpha \vee \neg\neg\alpha$	Modus Ponens (1, 2)
	$\equiv \alpha \rightarrow \neg\neg\alpha$	
4.	α	Vorraussetzung
5.	$\neg\neg\alpha$	Modus Ponens (3, 4)

Aufgabe 13.3: Freie Variablen (4 Punkte)

Bestimmen Sie für jeden der folgenden prädikatenlogischen Ausdrücke die Menge der in ihm enthaltenen freien Variablen (wobei k ein Konstantensymbol aus der zugehörigen Signatur sei):

a)

$$(\bigvee_x x \doteq y \vee x \doteq z)$$

b)

$$\neg \bigvee_x \neg x \doteq k$$

Lösung zu Aufgabe 13.3

a) $f((\bigvee_x x \doteq y \vee x \doteq z)) = f(\bigvee_x x \doteq y) \cup f(x \doteq z) = f(x \doteq y) \setminus \{x\} \cup \{x, z\} = \{x, y\} \setminus \{x\}\{x, z\} = \{y\} \cup \{x, z\}$ $= \{x, y, z\}$

b) $f(\neg \bigvee_x \neg x \doteq k) = f(\bigvee_x \neg x \doteq k) = f(\neg x \doteq k) \setminus \{x\} = \{x\} \setminus \{x\} = \varnothing$

Aufgabe 13.4: Substitution (4 Punkte)

Betrachten Sie den folgenden Prädikatenlogischen Ausdruck:

$$\alpha = (\bigvee_x x \doteq y \vee \bigvee_y x \doteq y)$$

Geben Sie den Ausdruck β an, so dass $\mathrm{Subst}(\alpha, x, z, \beta)$ wahr ist und den Ausdruck γ an, so dass $\mathrm{Subst}(\alpha, y, z, \gamma)$ wahr ist.

Lösung zu Aufgabe 13.4

$\beta = (\bigvee_x x \doteq y \vee \bigvee_y z \doteq y)$ $\gamma = (\bigvee_x x \doteq z \vee \bigvee_y x \doteq y)$